P1 – Statique des fluides – corrigé du TD

Exercice 7B : Principe du manomètre à colonne de liquide

1) Pour un fluide incompressible à l'équilibre, un axe (Oz) vertical ascendant, 2 points A et B appartenant à un même fluide : $P_A + \mu g z_A = P_B + \mu g z_B$
2) Soit A un point de la surface du liquide à gauche et B un point de la surface du liquide à droite : $P_{atm} + \mu gH = P'$ ($P' > P_{atm}$ normal car B en dessous de A)
3) $P' = 1023$ hPa
   $H = (P' - P_{atm})/(\mu_{Hg}.g) = 7{,}4$ mm
   Le manomètre à eau permet des grandes dénivellations pour de faibles variations de pression : il a comme avantage sa sensibilité.
   Le manomètre à mercure est quant à lui compact pour de grandes variations de pression.

Exercice 7A/8B : Eau et huile

Soit B un point de la surface de l'eau à gauche et A un point de la surface à droite :

$P_A + \mu_{eau}.g.z_A = P_B + \mu_{eau}.g.z_B$ avec $P_A = P_{atm}$ et $z_A - z_B = h_1$ donc $P_B = P_{atm} + \mu_{eau}.g.h_1$

Soit C un point de la surface de l'huile :

$P_B + \mu_{huile}.g.z_B = P_C + \mu_{huile}.g.z_C$ avec $P_C = P_{atm}$ et $z_C - z_B = h_2$ donc $P_{atm} + \mu_{huile}.g\ .h_2 = P_B = P_{atm} + \mu_{eau}.g.h_1$

Donc $\mu_{huile} = \mu_{eau}.h_1/h_2 = 920$ kg.m^{-3}

Exercice 8A/9A : Baromètre de Torricelli

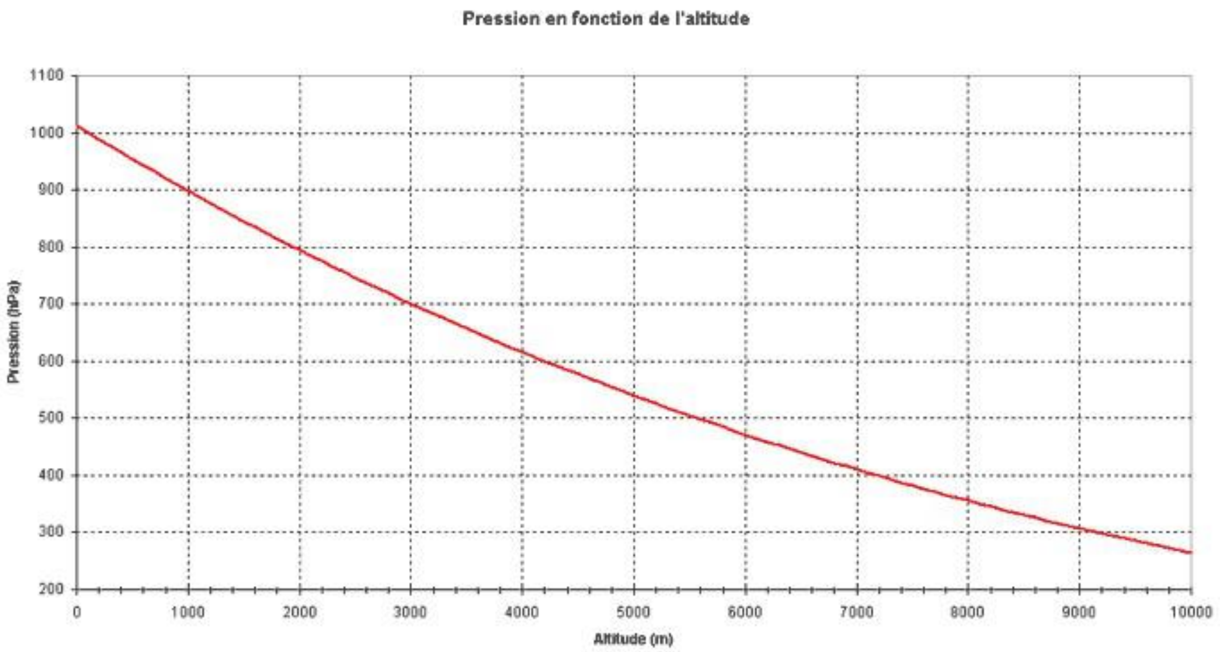
1) $P_A = P_{atm} = P_B = P_C + \rho_{Hg}.g.h$ avec $P_C = 0$ donc $h = P_{atm}/(\rho_{Hg}.g) = 75{,}9$ cm
2) Pour l'eau, $h' = P_{atm}/(\rho_{eau}.g) = 10{,}3$ m
3) $T_A = 12\text{cmHg} = 12.1013/75{,}9 = 160$ hPa $= 1{,}6.10^{-1}$ bar

Exercice 9A : Force de pression subie par un barrage

1) Pour un fluide incompressible à l'équilibre, un axe (Oz) vertical ascendant, 2 points A et B appartenant à un même fluide : $P_A + \mu g z_A = P_B + \mu g z_B$
   Pour A point de la surface et B point d'altitude z (négatif) : $P_{atm} + \mu_{eau}.g.0 = P(z) + \mu_{eau}.g.z$
   Donc $P(z) = P_{atm} - \mu_{eau}.g.z$ (normal avec $z < 0$)
2) Comme la pression n'est pas constante sur toute la surface du barrage, on ne peut pas utiliser P.S pour le calcul de la force puisque la pression n'est pas unique.
3) $dF = P(z).dS = P(z).L.dz = (P_{atm} - \mu_{eau}.g.z).L.dz$
4) Le barrage est placé entre $z = -H$ et $z = 0$:
   $F = \int_{-H}^{0}(P_{atm} - \mu_{eau}.g.z)Ldz = \left[P_{atm}.Lz - \frac{\mu_{eau}.g.L}{2}.z^2\right]_{-H}^{0} = P_{atm}.L.H + \frac{\mu_{eau}.g.L}{2}H^2 = 1{,}2.10^9$ N
5) $F_{horizontale} = F - F_{air} = F - P_{atm}.L.H = 8{,}0.10^8$ N

Exercice 10B : Ascension dans l'atmosphère

1) $M = 80\%.28,0 + 20\%.32,0 = 29,0\ g.mol^{-1}$
2) $P(z) = P_0.exp(-Mgz/RT_0)$ donc à z = 1000 m : P(1000) = 898 hPa
3) Allure classique d'exponentielle décroissante :



$P(z) = P_0.exp(-z/L)$ avec $L = RT_0/Mg = 8266$ m

Exercice 10A/11B : Montgolfière

1) Masse d'air chaud : $m_{air} = M_{air}.n = M_{air}.P_{atm}.V/RT_1 = 2003$ kg donc $m_{tot} = m_{air} + m_{nacelle} + m_{enveloppe} = 2303$ kg
2) Poids $P = m_{tot}.g = 22,59.10^3$ N $< \Pi_A = \mu_{air,ext}.g.V = M_{air}.P_{atm}.g.V/RT_0 = 24,5.10^3$ N :la montgolfière décolle.
3) A 5500 m : $P = m_{tot}.g = (M_{air}.P_{atm}.V./RT_1 + m_{nacelle} + m_{enveloppe})g = 12,6.10^3$ N
Supérieur à $\Pi_A = \mu_{air,ext}.g.V = M_{air}.P_{atm}.g.V/RT_0 = 12,1.10^3$ N : la résultante est dirigée vers le bas.

Exercice supplémentaire : bouchon de liège

1) Lorsque le bouchon est statique, on a égalité des normes des forces : $P = \Pi_A$
$d.\mu_{eau}.H.s.g = \mu_{eau}.h.s.g$ donc $h = H.d = 1,2$ cm
2) $(d.\mu_{eau}.H.s + m)g = \mu_{eau}.h'.s.g$ donc $h' = Hd + m/\mu_{eau}.s = 4,2$ cm
3) Pour une situation dynamique, on a le bilan mécanique suivant (projeté selon Oz descendant avec z altitude inférieure du bouchon et O point de la surface de l'eau) :
$m\ddot{z} = mg - \mu_{eau}.z.s.g$ alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{dH}}$ donc $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0,2$ s. Cette période augmente lorsque l'on charge le bouchon.

Exercice 11A : Pression dans la troposphère

A.1) L'hypothèse d'atmosphère isotherme est remise en cause par les fortes variations de température observées (variation de 70 K sur 11 km). D'autre part, les prévisions du modèle (courbe en pointillés) ne coincident pas totalement avec les valeurs réelles (mesures de pression).

A.2) Le graphe obtenu présente l'allure d'une droite, on choisit le modèle affine $T(z)=T_0-\alpha z$

A.3) Une régression linéaire (dans les unités SI) donne $\alpha=6{,}99.10^{-3}\,K.m^{-1}$ et $T_0=302\ K$

B.1) En partant de $\mu=\frac{m}{V}$ et en utilisant $PV=nRT$, on obtient $\mu=\frac{PM}{RT}$

B.2) $\mu=\frac{P M_{air}}{R(T_0-\alpha z)}$

B.3) $dP=-\mu g\,dz$ => $dP=-\frac{P M_{air}}{R(T_0-\alpha z)} g\,dz$ séparation des variables $\frac{dP}{P}=-\frac{M_{air} g}{R}\frac{dz}{(T_0-\alpha z)}$

On intègre entre le sol ($z_A=0$, $P_A=P_0$) et un point B d'altitude z_B (pression P_B inconnue)

$$\int_{P_A}^{P_B}\frac{dP}{P}=-\frac{M_{air} g}{R}\int_{z_A}^{z_B}\frac{dz}{(T_0-\alpha z)} \quad => \quad [\ln(P)]_{P_0}^{P_B}=-\frac{M_{air} g}{R}\left[\frac{1}{-\alpha}\ln(T_0-\alpha z)\right]_0^{z_B}$$

$$\ln(P_B)-\ln(P_0)=+\frac{M_{air} g}{R\alpha}\ln\left(\frac{T_0-\alpha z_B}{T_0}\right) \quad \text{d'où} \quad \ln(P_B)=\frac{M_{air} g}{R\alpha}\ln(T_0-\alpha z_B)-\frac{M_{air} g}{R\alpha}\ln(T_0)+\ln(P_0)$$

On obtient l'expression demandée avec $C=\frac{Mg}{R\alpha}$ et $K=-C\ln(T_0)+\ln(P_0)$

B.4) En prenant l'exponentielle de l'expression précédente, $P(z)=P_0\left(\frac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{M_{air} g}{R\alpha}}=P_0\left(1-\frac{\alpha}{T_0}z\right)^C$

Par identification avec l'expression demandée, $z_c=\frac{T_0}{\alpha}$

On obtient C = 4,9 (sans dimension). T_0 s'exprime en K et α en $K.m^{-1}$ donc z_c s'exprime en m, c'est une distance caractéristique. AN $z_c = 4{,}3.10^4$ m = 43 km, c'est la taille approximative de l'atmosphère.

B.5) En posant $\epsilon=\frac{z}{z_c}$ on a $\epsilon\ll 1$; on peut effectuer un D.L. à l'ordre 1 $(1-\epsilon)^C\simeq 1-C\epsilon$

On obtient alors $P(z)\simeq P_0\left(1-C.\frac{z}{z_c}\right)\simeq P_0\left(1-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$

Pour l'atmosphère isotherme, $P(z)=P_0 e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$. Avec $\epsilon=\frac{z}{\left(\frac{RT_0}{Mg}\right)}$ on a $\epsilon\ll 1$, à l'ordre 1 $e^{-\epsilon}\simeq 1-\epsilon$

On en déduit $P(z)\simeq P_0\left(1-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$. Les deux modèles fournissent les mêmes résultats à basse altitude.