

$$3) P_3(X) = 2X^3 - 13X^2 + 17X + 12$$

$$\begin{aligned} P_3(3) &= 2 \times 3^3 - 13 \times 3^2 + 17 \times 3 + 12 \\ &= 2 \times 27 - 13 \times 9 + 51 + 12 \\ &= 54 - 117 + 51 + 12 = 117 - 117 = 0 \end{aligned}$$

Donc 3 est racine de P_3 , ainsi $P_3(X)$ est factorisable par $X-3$

On pose la division euclidienne de $P_3(X)$ par $X-3$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 13X^2 + 17X + 12 & X-3 \\ \hline -2X^3 + 6X^2 & 2X^2 - 7X - 4 \\ \hline -7X^2 + 17X & \\ 7X^2 - 21X & \\ \hline -4X + 12 & \\ 4X - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } P_3(X) = (X-3)(2X^2 - 7X - 4)$$

Exemple 21

$$\begin{aligned} 1) (E_1) &\Leftrightarrow 4x^2 - 1 + (2x-1)(3x+2) - (2x-1)(x-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)[(2x+1) + (3x+2) - (x-7)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1+3x+2-x+7) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(4x+10) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ ou } 4x+10=0 \\ &\Leftrightarrow 2x=1 \text{ ou } 4x=-10 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{10}{4} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \left\{ \frac{1}{2} ; -\frac{5}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} 3) (E_3) &\Leftrightarrow (3x+1)^2 - 4(x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [(3x+1) - 2(x-3)][(3x+1) + 2(x-3)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x+1-2x+6)(3x+1+2x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+7)(5x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+7=0 \text{ ou } 5x-5=0 \\ &\Leftrightarrow x=-7 \text{ ou } 5x=5 \\ &\Leftrightarrow x=-7 \text{ ou } x=1 \end{aligned}$$

(E_3) a exactement deux solutions : -7 et 1.

$$5) (E_5) \Leftrightarrow (2x-1)(x+3)^2 - (2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)[(x+3)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)[(x+3)-1][(x+3)+1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+3-1)(x+3+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ou } x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -4$$

L'ensemble des solutions de (E_5) est : $S = \left\{ \frac{1}{2}; -2; -4 \right\}$

Exemple 22

1) Soit $P(X) = X^3 + 7X^2 - 21X - 27$

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^3 + 7 \times 3^2 - 21 \times 3 - 27 \\ &= 27 + 63 - 63 - 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3 est une racine de $P(X)$ donc $P(X)$ est factorisable par $X-3$.

On pose la division euclidienne de $P(X)$ par $X-3$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 7X^2 - 21X - 27 & X-3 \\ -X^3 + 3X^2 & X^2 + 10X + 9 \\ \hline 10X^2 - 21X & \\ -10X^2 + 30X & \\ \hline 9X - 27 & \\ -9X + 27 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi $P(X) = (X-3)(X^2 + 10X + 9)$

Soit $Q(X) = X^2 + 10X + 9$

$$Q(-1) = (-1)^2 + 10 \times (-1) + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$$

Donc -1 est racine de $Q(X)$, ainsi $Q(X)$ est factorisable par $X+1$.

On pose la division euclidienne de $Q(X)$ par $X+1$.

$$\begin{array}{r|l} X^2 + 10X + 9 & X+1 \\ -X^2 - X & X+9 \\ \hline 9X + 9 & \\ -9X - 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $Q(X) = (X+1)(X+9)$

Ainsi $P(X) = (X-3)(X+1)(X+9)$

Soit (E) l'équation: $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$

$$(E) \Leftrightarrow (x-3)(x+1)(x+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ ou } x+1=0 \text{ ou } x+9=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=-9$$

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{3; -1; -9\}$.

2a) Soit (E_1) l'équation: $x^6 + 7x^4 - 21x^2 - 27 = 0$

On pose $X = x^2$. Donc $X^2 = x^4$ et $X^3 = x^6$

$$X^2 = (x^2)^2 = x^4$$

$$X^3 = (x^2)^3 = x^6$$

$$(E_1) \Leftrightarrow X^3 + 7X^2 - 21X - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow X=3 \text{ ou } X=-1 \text{ ou } X=-9$$

$$\Leftrightarrow x^2=3 \text{ ou } x^2=-1 \text{ ou } x^2=-9$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3}$$

aucune solution
car un carré ne peut
être négatif.

L'ensemble des solutions de (E_1) est:

$$S = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$$

b) Soit (E_2) l'équation : $x^9 + 7x^6 - 21x^3 - 27 = 0$

On pose $X = x^3$. Ainsi $X^2 = x^6$ et $X^3 = x^9$

$$\text{Donc } (E_2) \Leftrightarrow X^3 + 7X^2 - 21X - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 3 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = -9$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 3 \text{ ou } x^3 = -1 \text{ ou } x^3 = -9$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -\sqrt[3]{9}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$S = \left\{ \sqrt[3]{3}, -1, -\sqrt[3]{9} \right\}$$

c) Soit (E_3) l'équation : $x\sqrt{x} + 7x - 21\sqrt{x} - 27 = 0$

L'ensemble de définition de (E_3) est $D_f = \mathbb{R}^+$

On pose $X = \sqrt{x}$. Ainsi $X^2 = x$ et $X^3 = x\sqrt{x}$

$$X^3 = (\sqrt{x})^3 = (\sqrt{x})^2 \times \sqrt{x} = x \times \sqrt{x}$$

$$(E_3) \Leftrightarrow X^3 + 7X^2 - 21X - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 3 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = -9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \text{ ou } \sqrt{x} = -1 \text{ ou } \sqrt{x} = -9$$

aucune solution car une racine carrée ne peut être négative

$$\Leftrightarrow x = 9$$

Or 9 appartient à D_f , donc l'ensemble des solutions de (E_3) est : $S = \{9\}$.

d) Soit (E_4) l'équation: $\frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x} - 27 = 0$

(l'ensemble de définition de (E_4) est $D_f = \mathbb{R}^*$)

On pose $X = \frac{1}{x}$. Ainsi $X^2 = \frac{1}{x^2}$ et $X^3 = \frac{1}{x^3}$

Donc $(E_4) \Leftrightarrow X^3 + 7X^2 - 21X - 27 = 0$

$$\Leftrightarrow X = 3 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = -9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 \text{ ou } \frac{1}{x} = -1 \text{ ou } \frac{1}{x} = -9$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -\frac{1}{9}$$

Or $\frac{1}{3}$, -1 et $-\frac{1}{9}$ appartiennent à D_f .

(l'ensemble des solutions de (E_4) est: $S = \left\{ \frac{1}{3}; -1; -\frac{1}{9} \right\}$.)

Exemple 23

1) On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x+3$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x-1)(-2x+3)$	$-$	0	0	$-$

L'ensemble des solutions de (I_1) est :

$$S =]-\infty; \frac{1}{3}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$$

3) L'ensemble de définition de (I_3) est

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
x		$-$	$-$	0	$+$	
$-x-2$		$+$	0	$-$	$-$	
$\frac{x}{-x-2}$		$-$	$ $	$+$	0	$-$

Ainsi $(I_3) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[$

Toutes ces valeurs appartiennent à D_f ,
l'ensemble des solutions de (I_3) est :

$$S =]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 \text{S)} \quad (I_S) &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (4x^2 - 12x + 9) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - (2x-3)^2 < 0 \\
 &\Leftrightarrow [(x-1) - (2x-3)][(x-1) + (2x-3)] < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1-2x+3)(x-1+2x-3) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (-x+2)(3x-4) < 0
 \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$-x+2$	+	+	0	-	✓
$3x-4$	-	0	+	+	✓
$(-x+2)(3x-4)$	-	0	+	0	-

(l'ensemble des solutions de (I_S) est :

$$S =]-\infty; \frac{4}{3}[\cup]2; +\infty[$$

7] Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de (I_7) .

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$(I_7) \Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(2x+1)^2$	+	+	0	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
quotient	+	-	0	-	+

$$(I_7) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Toutes ces valeurs appartiennent à $\mathcal{D}_f$.

(l'ensemble des solutions de (I_7) est :

$$S =]-\infty; -1[\cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup]1; +\infty[$$

9) On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{7}$	3	$+\infty$	
-5	—	—	—		
$x-3$	—	—	0	+	$\neq$
$7x+4$	—	0	+	+	$\neq$
$-5(x-3)(7x+4)$	—	0	+	0	—

L'ensemble des solutions de (I_9) est :

$$S =]-\infty; -\frac{4}{7}] \cup [3; +\infty[$$

11) $(I_{11}) \Leftrightarrow (x+2)[(-3x-4)+(4x-2)] < 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)(-3x-4+4x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-6) < 0$$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$	
$x+2$	—	0	+	+	$\neq$
$x-6$	—	—	0	+	$\neq$
$(x+2)(x-6)$	+	0	—	0	+

L'ensemble des solutions de (I_{11}) est :

$$S =]-2; 6[$$