P2 – Fluides en écoulement stationnaire – corrigé du TD

Exercice 8B : Vidange d'un réservoir

1) $D_{v2} = v_2.S_2$ donc $v_2 = 20$ m.s^{-1}
2) Pour cet écoulement stationnaire et ce fluide incompressible, $D_{v2} = D_{v1}$ donc $v_2.S_2 = v_1 .S_1$ donc $v_1 = v_2.S_2/S_1$
3) On obtient $v_1 = 2{,}5$ mm.s^{-1} $\ll v_2$: la surface du liquide est quasiment immobile.

Exercice 9B : Conservation du débit massique

1) $D_{mA} = \mu_A.S_A.v_A = \frac{P_A M_{air}}{RT_0}.\pi\left(\frac{d_A}{2}\right)^2.v_A = 5{,}8.10^{-2}$ kg.s^{-1}
2) Ecoulement stationnaire
3) $D_{mA} = \mu_A.S_A.v_A = \frac{P_A M_{air}}{RT_0}.\pi\left(\frac{d_A}{2}\right)^2.v_A = D_{mB} = \mu_B.S_B.v_B = \frac{P_B M_{air}}{RT_0}.\pi\left(\frac{d_B}{2}\right)^2.v_B$ donc $v_B = v_A.\frac{P_A.d_A^2}{P_B.d_B^2} =$ 3,125 m.s^{-1}

Exercice 8A/10B : Ecoulement dans une tuyère

1) La transformation est adiabatique (énoncé) et réversible, donc $PV^\gamma = cste$ pour le gaz considéré comme parfait. On en déduit (grâce à $V = \frac{nRT}{P}$) que $\underline{T^\gamma P^{1-\gamma} = cste}$

On a donc $T_e{}^\gamma P_e{}^{1-\gamma} = T_s{}^\gamma P_s{}^{1-\gamma}$ d'où $\boxed{T_s = T_e\left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$

A.N $T_s = 3573 \times \left(\frac{110}{1{,}0}\right)^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}} = \underline{939\,K}$

2) $\mu = \frac{PM}{RT}$ donc $\frac{\mu_s}{\mu_e} = \frac{P_s}{P_e}\frac{T_e}{T_s}$ A.N $\boxed{\alpha = 3{,}5.10^{-2}}$ $\mu_s < \mu_e \rightarrow$ détente

$= \frac{P_s}{P_e}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{1/\gamma}$

3) Conservation du débit massique : $D_{me} = D_{ms} \Leftrightarrow \mu_e.S_e.v_e = \mu_s.S_s.v_s$ donc $v_s = v_e.S_e/(S_s.\alpha) =$

4) Pour $S_e = S_s$, $v_s = 3{,}7.10^3$ m.s^{-1} $\gg v_e$ donc le débit volumique S.v augmente.

Exercice 9A/11B : Chute d'un grêlon

1) $\|\vec{\Pi}_A\| = \mu_{air} V_{grêlon} g$ et $\|\vec{P}\| = m_{grêlon} g = \mu_{glace} V_{grêlon} g$ On en déduit $\alpha = \frac{\|\vec{\Pi}_A\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\mu_{air}}{\mu_{glace}} \simeq \frac{1}{1000}$ (ODG)

Il n'est pas nécessaire de tenir compte de la poussée d'Archimède pour une première approche.

2) Expression des vecteurs : $\vec{v} = \dot{z}\vec{e_z}$ et $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e_z}$ (coordonnée z sur un axe vertical ascendant)
Le grêlon subit le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -m_{grêlon} g \vec{e_z}$ et la force de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r \dot{z}\vec{e_z}$
PFD en projection sur l'axe vertical : $m_{grêlon}\ddot{z} = -m_{grêlon} g - 6\pi\eta r \dot{z}$
On en déduit l'équation différentielle $\ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m_{grêlon}}\dot{z} = -g$

En régime permanent, la vitesse limite est atteinte donc $\dot{z} = cste$ et $\ddot{z} = 0$: on en déduit $\dot{z}_{\lim} = \frac{-m_{grêlon} g}{6\pi\eta r}$

La masse du grêlon peut être calculée grâce à $m_{grêlon} = \mu_{glace} V_{grêlon} g = \mu_{glace} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g$

Application numérique : $v_{\lim} = |\dot{z}_{\lim}| = \frac{0{,}9.10^3 . \frac{4}{3}\pi . (3.10^{-3})^3 . 9{,}81}{6\pi . 2.10^{-5} . 3.10^{-3}} = 883 \text{ m.s}^{-1}$

Calcul du nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{\mu_{air} v_{\lim} d}{\eta_{air}}$ (les grandeurs μ et η sont celles du fluide en écoulement)

Pour μ_{air} on peut prendre l'ordre de grandeur 1 kg.m^{-3}, ou calculer $\mu_{air} = \frac{P_{atm} M_{air}}{RT_{air}} = 1{,}23 \text{kg.m}^{-3}$

Application numérique : $\mathrm{Re} = \frac{1{,}23 . 883 . 6.10^{-3}}{2.10^{-5}} = 3{,}2.10^5$ on a donc Re>>1, l'hypothèse de vitesse "faible" n'est pas validée.

3) En reprenant le bilan de forces et le PFD on obtient l'équation différentielle $\ddot{z} + \frac{1}{2}\frac{C_x \mu_{air} S}{m_{grêlon}}(\dot{z})^2 = -g$

En régime permanent on obtient $v_{\lim} = \sqrt{\dot{z}_{\lim}^2} = \sqrt{\frac{2 m_{grêlon} g}{C_x \mu_{air} S}}$

En remplaçant $m_{grêlon} = \mu_{glace} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g$ et $S = \pi r^2$ on obtient $v_{\lim} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{r \cdot \mu_{glace} \cdot g}{C_x \mu_{air}}} = 11{,}2 \text{m.s}^{-1}$

Calcul du nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{1{,}23 . 11{,}2 . 6.10^{-3}}{2.10^{-5}} = 4{,}1.10^3$ on a donc Re > 10^3, l'hypothèse de grande vitesse est vérifiée, la valeur calculée pour $v_{\lim}$ est fiable.

Exercice 11A : Fonctionnement d'une clepsydre

1) Conservation du débit volumique (écoulement stationnaire, fluide incompressible) : $S(H) . v' = s . v$

2) Ecoulement stationnaire, fluide parfait et incompressible, on applique la relation entre un point A situé à la surface du liquide et un point B situé à la sortie.

$\frac{P_B}{\mu} + \frac{1}{2}v_B^2 + g z_B = \frac{P_A}{\mu} + \frac{1}{2}v_A^2 + g z_A$ se réécrit $\frac{P_{atm}}{\mu} + \frac{1}{2}v^2 + 0 = \frac{P_{atm}}{\mu} + \frac{1}{2}v'^2 + gH$

D'après la question précédente, $v' = \frac{s}{S(H)}v$ On obtient finalement $v = \frac{\sqrt{2gH(t)}}{\left(1 - \left(\frac{s}{S(H)}\right)^2\right)}$

3) $v' = -\frac{dH}{dt}$. On a également $v' = \frac{s}{S(H)} v$ et $v = \frac{\sqrt{2gH(t)}}{\left(1 - \left(\frac{s}{S(H)}\right)^2\right)}$ donc $\frac{dH}{dt} = -\frac{s}{S(H)} \frac{\sqrt{2gH(t)}}{\left(1 - \left(\frac{s}{S(H)}\right)^2\right)}$

4) $\frac{s}{S(H)} \ll 1$ donc $\frac{dH}{dt} \simeq -\frac{s}{S(H)} \sqrt{2gH(t)}$ $\alpha = s\sqrt{2g}$

5) Séparation des variables : $\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{\alpha}{S_0} dt$ => $2\left(\sqrt{H(t)} - \sqrt{H_0}\right) = \frac{-\alpha}{S_0} t$ => $\sqrt{H(t)} = \sqrt{H_0} - \frac{\alpha}{2S_0} t$

Finalement $H(t) = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\alpha}{2S_0} t\right)^2$

La durée τ nécessaire à la vidange complète est telle que H(τ) = 0 <=> $\tau = 2S_0 \frac{H_0}{\alpha} = \frac{S_0}{s} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$ AN : τ = 74 s

6) D'après l'équation différentielle, en remplaçant $S(H) = \pi (r(H))^2 = \pi a^2 H^{2n}$, $\frac{dH}{dt} = -\frac{s}{\pi a^2 H^{2n}} \sqrt{2gH(t)}$

Pour une baisse régulière, on doit avoir $v'_0 = 6\,cm.min^{-1} = -\frac{dH}{dt}$ soit $\frac{s}{\pi a^2 H^{2n}} \sqrt{2gH(t)} = v'_0$

Cela impose d'une part $n = \frac{1}{4}$ (v'_0 ne doit pas dépendre de H), et d'autre part $\frac{s}{\pi a^2} \sqrt{2g} = v'_0$

Avec s = 1 cm², on obtient $a = \sqrt{s \frac{\sqrt{2g}}{\pi v'_0}} = 0{,}376\, m^{3/4}$

Allure du récipient : $r \propto H^{1/4}$ (proportionnel)