Application directe du cours

Exercice 1 Vitesse et débit

1) Une arrivée d'eau permet de remplir un seau de 10 L en 15 s. Quelle est la vitesse de l'eau à travers la conduite de section S = 5 cm^2 qui alimente ce robinet ?
2) Une conduite cylindrique de rayon R = 50 cm permet de fournir un débit de pétrole de 1000 $m^3.h^{-1}$
Calculer la vitesse du pétrole dans la conduite.

Exercice 2 Débits volumiques, débits massiques

Dans chacun des cas, calculer le débit volumique en $m^3.s^{-1}$ et le débit massique en $kg.s^{-1}$ (les données fournies ne sont pas toutes utiles).

1) En une heure, 30 tonnes de pétrole circulent dans une conduite.
Densité du pétrole : 0,79 Vitesse du pétrole dans la conduite : 1,0 $m.s^{-1}$

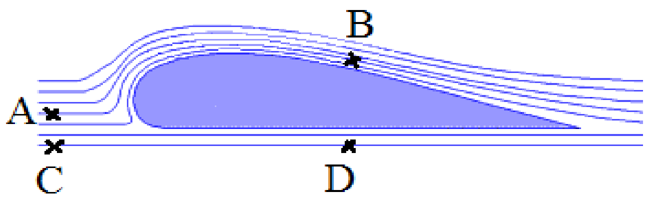
2) De l'eau circule dans une conduite cylindrique de 10 cm de diamètre à la vitesse de 2,0 $m.s^{-1}$.
Masse molaire de l'eau M(H_2O) = 18 $g.mol^{-1}$ $\mu_{eau}=1{,}0.10^3\,kg.m^{-3}$

3) Une conduite de section égale à 10 cm^2 est traversée par 300 L d'huile en une heure.
Périmètre de la conduite : 12 cm $\mu_{huile}=0{,}80\,g.cm^{-3}$

Exercice 3 Analyse qualitative des lignes de courant

Lorsque la vitesse de l'air est faible comparée à la vitesse du son (~340 $m.s^{-1}$), la masse volumique est conservée le long d'une ligne de courant. On parle alors d'*écoulement incompressible*, même si l'air est en général un fluide compressible.

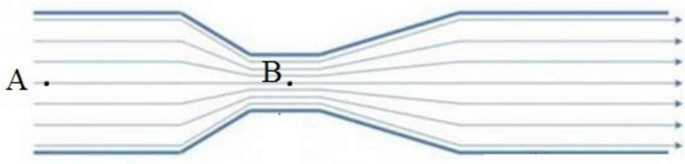
L'écoulement laminaire de l'air au voisinage d'une aile d'avion (subsonique !) peut être considéré comme incompressible et stationnaire. On suppose que le profil de vitesse est uniforme en amont de l'aile (A et C)



Comparer les vitesses aux points B et D en justifiant précisément.

Exercice 4 Conservation du débit volumique

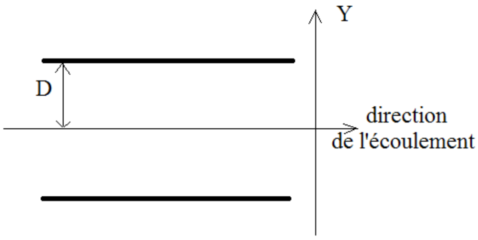
On étudie un écoulement dans une conduite qui présente un rétrécissement. Le diamètre de la conduite au point B est trois fois plus faible qu'au point A. On suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible.

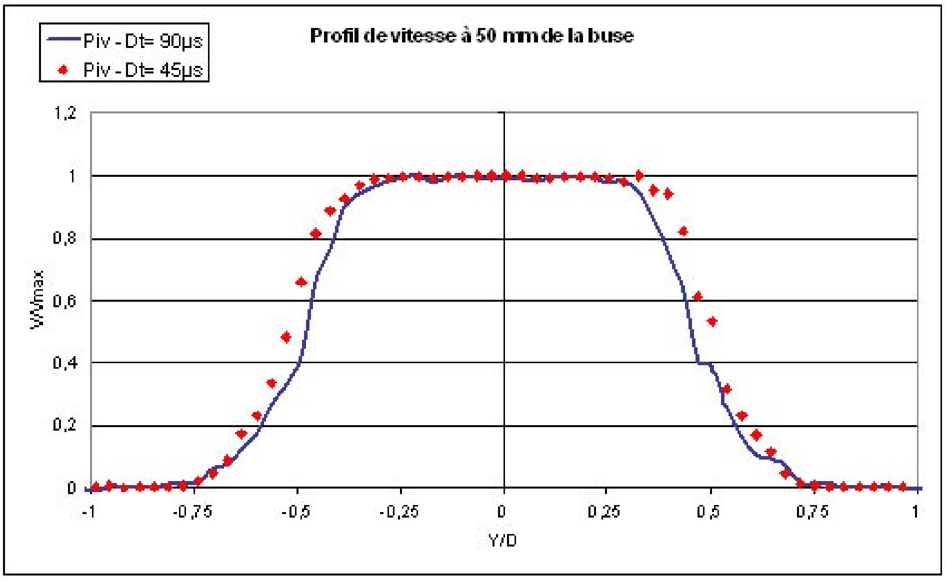


On mesure v_A = 2,5 $m.s^{-1}$; en déduire v_B

Exercice 5 Profil de vitesse et viscosité

On a reporté sur la courbe ci-contre les mesures de vitesse d'un fluide en différentes positions d'une conduite, repérées par leur ordonnée Y.

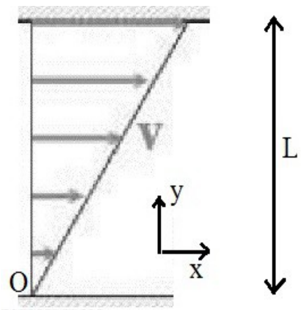




Dans quelles zones la force surfacique de viscosité est-elle nulle ?
En quels points est-elle maximale ?

Exercice 6 Profil de vitesse et viscosité (2)

Dans la situation représentée ci-dessous, la vitesse du fluide vaut $\vec{v} = v_0 \frac{y}{L} \vec{u}_x$ où v_0 est une constante.

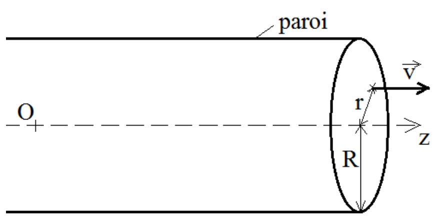


1) Quelle est la vitesse de la paroi inférieure ? De la paroi supérieure ?

2) Exprimer la force surfacique de viscosité. Comment varie-t-elle en fonction de la position y ?

Exercice 7 Conditions aux limites

Dans une conduite cylindrique d'axe Oz et de rayon R, le profil de vitesse d'un fluide visqueux en écoulement lent est le suivant :



$$\vec{v} = v_0 (1 + \alpha r^2) \vec{u}_z$$

(r > 0 est la distance à l'axe de la conduite et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire de l'axe Oz)

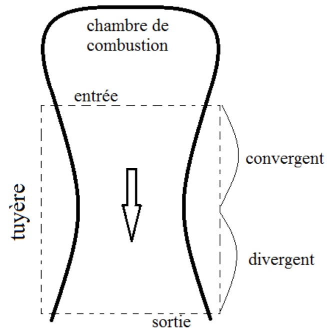
1) Quelle est la valeur du vecteur $\vec{v}$ sur les parois de la conduite ?
2) En déduire l'expression de la constante α en fonction de R.
3) Représenter l'allure du profil de vitesse v(r).

4) Où la force surfacique de viscosité est-elle maximale ? Nulle ?

Travaux dirigés – Groupe A

Exercice 8A Ecoulement dans une tuyère

Dans le moteur d'une fusée, la combustion des ergols a pour conséquence la présence de gaz à haute pression (P_e = 110 bar) et haute température (T_e = 3300 °C) dans la chambre de combustion. Ce gaz s'écoule à travers une tuyère ; à la sortie, le gaz se trouve à la pression atmosphérique P_s = 1,0 bar.



L'écoulement peut être considéré comme stationnaire car la combustion est contrôlée et régulière. On néglige les transferts thermiques lors du passage du gaz dans la tuyère, et on suppose que l'évolution subie par le gaz est réversible.

1) Justifier que l'on peut appliquer la loi de Laplace "PV^γ = cste" entre l'entrée et la sortie de la tuyère. En déduire la valeur de la température T_s du gaz en sortie de la tuyère.
Donnée γ = 1,4 pour le gaz étudié (considéré comme parfait)

2) Exprimer puis calculer numériquement le rapport $\alpha=\frac{\mu_s}{\mu_e}$ entre les masses volumiques du gaz à la sortie et à l'entrée de la tuyère. Le gaz subit-il une détente ou une compression ?

3) Exprimer le rapport $\frac{v_s}{v_e}$ entre les vitesses de sortie et d'entrée du gaz en fonction de α, S_e, et S_s (on fait l'hypothèse que sur chaque section droite de la tuyère, la vitesse et la masse volumique sont uniformes).

4) Calculer v_s pour v_e = 130 m.s^{-1} et $S_s = S_e$. Le débit volumique est-il conservé dans cet écoulement ?

Exercice 9A Chute d'un grêlon

On cherche à déterminer le type de force de frottement subie par un grêlon, afin d'estimer sa vitesse limite de chute.

Données numériques
- diamètre du grêlon : d = 6 mm
- μ_{glace} = 0,9.10^3 kg.m^{-3}
- g = 9,8 m.s^{-2}
- η_{air} = 2.10^{-5} Pl η_{eau} = 1.10^{-3} Pl M_{air} = 29,0 g.mol^{-1}
- P_{atm} = 1,00 bar T_{air} = 10°C

1) Exprimer, en fonction de μ_{air} et μ_{glace}, le rapport $\alpha=\frac{\|\vec{\Pi}_A\|}{\|\vec{P}\|}$ entre la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le grêlon et le poids du grêlon. Estimer l'ordre de grandeur de α. Faut-il tenir compte de la poussée d'Archimède ?

Pour modéliser la force de frottement exercée par l'air sur le glaçon, on fait l'hypothèse d'une vitesse "faible" (**Re < 1**). La formule de Stokes est alors valable pour la force de frottement subie par le grêlon : $\vec{F}=-6\pi\eta r\vec{v}$ où r est le rayon du grêlon et $\vec{v}$ sa vitesse.

2) Déterminer la vitesse limite (atteinte en régime permanent) dans cette hypothèse, et calculer le nombre de Reynolds pour l'écoulement de l'air à proximité du grêlon (distance caractéristique : diamètre du grêlon). L'hypothèse de vitesse "faible" est-elle vérifiée ?

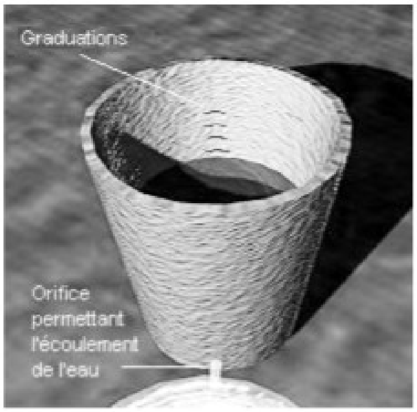
Dans le cas des grandes vitesses (**Re>10^3**), la formule applicable est $\vec{F}=-\frac{1}{2}C_x\mu_{air}S\,v^2\vec{e}_z$ avec C_x = 0,46 (coefficient sans dimension lié à la forme de l'obstacle) et S = πr^2 (*section efficace* du grêlon).

3) Calculer la vitesse limite dans ce modèle. Calculer le nombre de Reynolds correspondant et conclure.

Exercice 10A: Fonctionnement d'une clepsydre

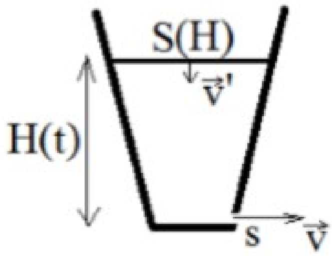
La clepsydre est un instrument de mesure du temps utilisé depuis l'Antiquité. Il s'agit d'un simple récipient dont la base est percée d'un orifice.

Clepsydre égyptienne



Le récipient est initialement rempli d'eau ; grâce à des graduations, l'observation de la baisse du niveau dans le récipient permet de connaître la durée... écoulée !

L'écoulement n'est pas rigoureusement stationnaire (la hauteur H de liquide varie au cours du temps). On admettra cependant qu'à chaque instant, il possède toutes les caractéristiques d'un écoulement stationnaire (écoulement *quasi-stationnaire*). On utilise le modèle du fluide parfait et incompressible pour l'eau.



Données utiles $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$

1) En justifiant, écrire une relation entre S(H), s, v et v'.

2) En utilisant la relation de Bernoulli, exprimer sans approximation la vitesse de sortie v de l'eau en fonction de S(H), s, g et H(t).

3) Quelle est la relation (simple) entre v' et $\frac{dH}{dt}$? En déduire l'équation différentielle vérifiée par H.

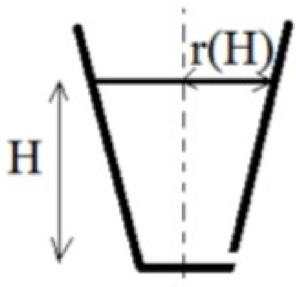
4) En supposant que la section du récipient reste grande devant celle de l'orifice de sortie, réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-\alpha}{S(H)}\sqrt{H}$$

où α est à exprimer en fonction de s et g.

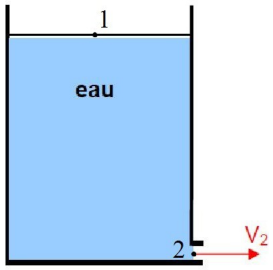
5) Résoudre cette équation différentielle dans le cas d'un récipient cylindrique de section constante S_0 (on notera H_0 la hauteur d'eau à t = 0). Exprimer la durée τ nécessaire à la vidange du récipient. AN : $H_0 = 30$ cm, $S_0 = 300$ cm^2, $s = 1$ cm^2

Dans la pratique, on souhaite que le niveau d'eau diminue de façon régulière dans le récipient (les graduations seront ainsi régulièrement espacées). On envisage un récipient de section variable, en notant r(H) le rayon du récipient à la cote H.



6) Pour une forme décrite par $r(H) = a H^n$, quelles doivent être les valeurs des paramètres a et n pour que le niveau d'eau baisse de 6 cm par minute durant toute la durée de fonctionnement de la clepsydre ? Schématiser le récipient correspondant.

Travaux dirigés – Groupe B

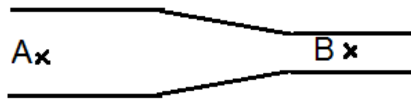


Exercice 8B Vidange d'un réservoir

Un réservoir cylindrique de rayon R_1 = 50 cm (section S_1) est muni, à sa base, d'une ouverture de section S_2 = 1 cm^2. On note v_1 la vitesse du liquide au niveau de la surface du réservoir, et v_2 la vitesse du liquide au niveau de l'ouverture. On mesure un débit de 2 L.s^{-1}

1) Calculer v_2.
2) En précisant les hypothèses effectuées, exprimer v_1 en fonction de v_2, S_1 et S_2.
3) Calculer numériquement v_1 et commenter la valeur obtenue.

Exercice 9B Conservation du débit massique

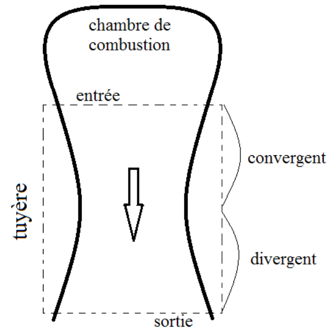


De l'air (assimilé à un gaz parfait, de masse molaire M_{air} = 29,0 g.mol^{-1}) s'écoule de façon stationnaire et isotherme (T_0 = 20 °C) dans une conduite qui présente un diamètre variable. On suppose que le profil de vitesse est uniforme sur chaque section droite.

Au point A, le diamètre de la conduite est d_A = 50 cm et la vitesse v_A = 1,0 m.s^{-1}. La pression est égale à P_A = 1,0 bar. Au point B, on a d_B = 20 cm et P_B = 2,0 bar. On donne R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}

1) Calculer le débit massique au point A.
2) Justifier que le débit massique se conserve dans cet écoulement.
3) En déduire la vitesse v_B de l'air au point B.

Exercice 10B Ecoulement dans une tuyère



Dans le moteur d'une fusée, la combustion des ergols a pour conséquence la présence de gaz à haute pression (P_e = 110 bar) et haute température (T_e = 3300 °C) dans la chambre de combustion. Ce gaz s'écoule à travers une tuyère ; à la sortie, le gaz se trouve à la pression atmosphérique P_s = 1,0 bar.

L'écoulement peut être considéré comme stationnaire car la combustion est contrôlée et régulière. On néglige les transferts thermiques lors du passage du gaz dans la tuyère, et on suppose que l'évolution subie par le gaz est réversible.

1) Justifier que l'on peut appliquer la loi de Laplace "PV^γ = cste" entre l'entrée et la sortie de la tuyère. En déduire la valeur de la température T_s du gaz en sortie de la tuyère.
Donnée γ = 1,4 pour le gaz étudié (considéré comme parfait)

2) Exprimer puis calculer numériquement le rapport $\alpha=\frac{\mu_s}{\mu_e}$ entre les masses volumiques du gaz à la sortie et à l'entrée de la tuyère. Le gaz subit-il une détente ou une compression ?

3) Exprimer le rapport $\frac{v_s}{v_e}$ entre les vitesses de sortie et d'entrée du gaz en fonction de α, S_e, et S_s (on fait l'hypothèse que sur chaque section droite de la tuyère, la vitesse et la masse volumique sont uniformes).

4) Calculer v_s pour v_e= 130 m.s^{-1} et S_s = S_e. Le débit volumique est-il conservé dans cet écoulement ?

Exercice 11B Chute d'un grêlon

On cherche à déterminer le type de force de frottement subie par un grêlon, afin d'estimer sa vitesse limite de chute.

Données numériques

- diamètre du grêlon : d = 6 mm
- $\mu_{glace} = 0{,}9.10^3$ kg.m^{-3}
- g = 9,8 m.s^{-2}
- $\eta_{air} = 2.10^{-5}$ Pl $\eta_{eau} = 1.10^{-3}$ Pl $M_{air} = 29{,}0$ g.mol^{-1}
- $P_{atm} = 1{,}00$ bar $T_{air} = 10$°C

1) Exprimer, en fonction de μ_{air} et μ_{glace}, le rapport $\alpha = \frac{\|\vec{\Pi}_A\|}{\|\vec{P}\|}$ entre la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le grêlon et le poids du grêlon. Estimer l'ordre de grandeur de α. Faut-il tenir compte de la poussée d'Archimède ?

Pour modéliser la force de frottement exercée par l'air sur le glaçon, on fait l'hypothèse d'une vitesse "faible" (**Re < 1**). La formule de Stokes est alors valable pour la force de frottement subie par le grêlon : $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où r est le rayon du grêlon et $\vec{v}$ sa vitesse.

2) Déterminer la vitesse limite (atteinte en régime permanent) dans cette hypothèse, et calculer le nombre de Reynolds pour l'écoulement de l'air à proximité du grêlon (distance caractéristique : diamètre du grêlon). L'hypothèse de vitesse "faible" est-elle vérifiée ?

Dans le cas des grandes vitesses (**Re>10³**), la formule applicable est $\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu_{air} S v^2 \vec{e_z}$ avec $C_x = 0{,}46$ (coefficient sans dimension lié à la forme de l'obstacle) et $S = \pi r^2$ (*section efficace* du grêlon).

3) Calculer la vitesse limite dans ce modèle. Calculer le nombre de Reynolds correspondant et conclure.