

**Corrigé**

**Exercice 9** Alimentation en eau d'un village

1) Hypothèses : fluide parfait et incompressible en écoulement stationnaire

On applique la relation entre A et B (même ligne de courant), en présence d'un élément actif (pompe)

$$\frac{P_B}{\mu} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B = \frac{P_A}{\mu} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A + w_i$$

$$P_B = P_A = P_{\text{atm}} \quad v_B = \frac{D_v}{S} = 12,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_A \sim 0 \text{ (le point de captage présente une grande surface)}$$

On en déduit  $w_i = \frac{1}{2} v_B^2 + g H = 571 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} > 0$  (la pompe fournit du travail à l'eau)

$$2) \mathcal{P}_i = D_m w_i = \mu D_v w_i = 57,1 \cdot 10^3 \text{ W} = 57,1 \text{ kW}$$

$$3) \Delta P_{\text{pertes}} = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,02 \text{ bar}$$

$$4) \text{ Relation de Bernoulli généralisée : } \frac{P_B}{\mu} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B = \frac{P_A}{\mu} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A + w_i - \Delta e_{\text{pertes}}$$

$$\text{avec } \Delta e_{\text{pertes}} = \Delta P_{\text{pertes}} / \mu = 407 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit  $w_i = 978 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  puis  $\mathcal{P}_i = 97,8 \text{ kW}$

5)  $\mathcal{P}_i = 50 \text{ kW}$  donc  $w_i = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$   $D_v = 100 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  (fixé), on cherche le rayon R de la conduite.

La vitesse  $v_B$  de l'eau dans la conduite n'est pas connue :  $v_B = \frac{D_v}{\pi R^2}$

La relation de Bernoulli généralisée s'écrit alors  $\frac{1}{2} \left( \frac{D_v}{\pi R^2} \right)^2 + g H = w_i - \frac{8 \eta D_v L}{\mu \pi R^4}$

On peut résoudre à la calculatrice, ou isoler  $R = \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{D_v^2}{\pi^2} + \frac{8 \eta D_v L}{\mu \pi}}{w_i - g H} \right)^{1/4} = 0,13 \text{ m} = 13 \text{ cm}$

### Exercice 10 Tubes de Pitot

1) On applique la loi de l'hydrostatique dans le liquide, entre A' et B' (fluide incompressible et statique) :

$$P_{A'} + \mu_0 g z_{A'} = P_{B'} + \mu_0 g z_{B'} \text{ (avec un axe Oz ascendant)}$$

On en déduit  $P_{A'} = P_{B'} + \mu_0 g h$

2) Entre A et A', l'air est statique. La différence d'altitude entre ces deux points (~10 cm) est négligeable devant la distance caractéristique des variations de pression dans l'air statique (~10 km), la variation de pression est donc négligeable,  $P_A \approx P_{A'}$  (même raisonnement pour B et B').

3) L'air est supposé parfait et se comporte ici comme un fluide incompressible (l'énoncé indique que la masse volumique  $\mu$  de l'air est uniforme). On peut supposer que l'écoulement est stationnaire (sinon, le liquide dans les tubes ne serait pas immobile). Toutes les hypothèses de la relation de Bernoulli sont vérifiées.

$$\text{Entre } A_0 \text{ et } A, \text{ on obtient } \frac{P_{A_0}}{\mu} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{P_A}{\mu} \quad . \quad \text{Entre } B_0 \text{ et } B, \text{ on obtient } \frac{P_{B_0}}{\mu} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{P_B}{\mu} + \frac{1}{2} v^2$$

En négligeant la variation d'altitude ( $\ll 10$  km) entre  $A_0$  et  $B_0$ , on a  $P_{A_0} = P_{B_0}$  donc  $P_A = P_B + \frac{1}{2} \mu v^2$

$$\text{En réutilisant } P_{A'} = P_{B'} + \mu_0 g h \quad P_A \approx P_{A'} \quad P_B \approx P_{B'} \quad \text{on obtient } \mu_0 g h = \frac{1}{2} \mu v^2$$

$$\text{Soit finalement } v = \sqrt{2 \frac{\mu_0}{\mu} g h}$$

$$4) \text{ AN : } v = \sqrt{2 \cdot \frac{13,6 \cdot 10^3}{1,3} \cdot 9,8 \cdot 24 \cdot 10^{-2}} = 2,2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\sim 800 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})$$

5) Le signal  $u$  délivré par le capteur est proportionnel à la différence de pression :  $u = \alpha (P_A - P_B) = \frac{1}{2} \alpha \mu v^2$  et la vitesse  $v$  de l'air (dans le référentiel de l'avion) est égale à celle de l'avion (dans le référentiel terrestre).

Il ne s'agit pas d'un capteur linéaire (le signal n'est pas proportionnel à la vitesse de l'avion), mais quadratique.

6) Dans le référentiel terrestre l'air est statique, et la pression ne dépend pas du référentiel choisi. C'est la pression en B qu'il faut mesurer pour connaître la pression atmosphérique et en déduire l'altitude de l'avion (en A, l'air n'est pas statique dans le référentiel terrestre, il se déplace à la vitesse de l'avion).

### Exercice 11: Au jardin avec Monsieur Simon

On recherche la vitesse  $v$  de l'écoulement dans le tuyau (on néglige la vitesse à la surface du réservoir).

Relation de Bernoulli entre la surface du réservoir et la sortie du tuyau ( $P_e = P_s = P_{\text{atm}}$ ,  $z_e - z_s = h$ )

$$\left( \frac{P_s}{\mu} + \frac{1}{2} v^2 + g z_s \right) = \left( \frac{P_e}{\mu} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + g z_e \right) - 0,316 \left( \frac{\mu v d}{\eta} \right)^{-0,25} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} K v^2$$
$$v^2 + 0,316 \left( \frac{\mu v d}{\eta} \right)^{-0,25} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} = g h$$

$$\text{Résolution à la calculatrice : } v = 0,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{donc} \quad D_v = \pi \frac{d^2}{4} v = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 0,19 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'arrosoir sera rempli en 60 secondes.