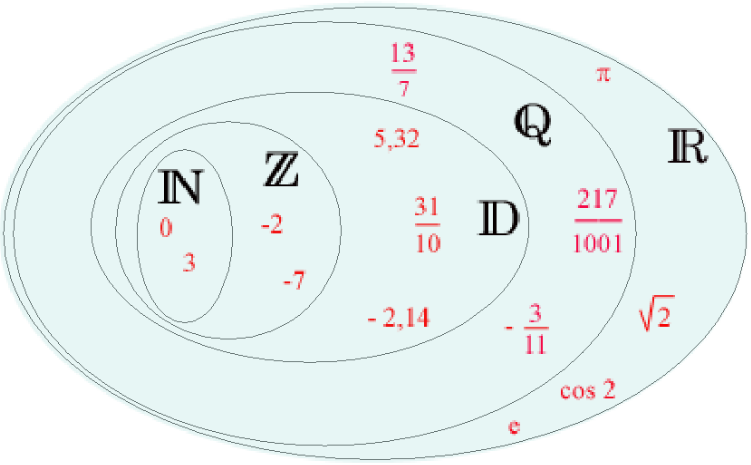
Chapitre 1 : Calculs numérique et algébrique

1 Les ensembles de nombres



Définition 1 : ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls)

$\mathbb{Z}$: entiers relatifs (positifs ou négatifs)

$\mathbb{D}$: nombres décimaux

$\mathbb{Q}$: nombres rationnels (fraction : quotient de deux entiers relatifs)

$\mathbb{R}$: nombres réels

2 Priorité des opérations

Propriété 1 : priorité des opérations

Lorsque l'on effectue un calcul numérique, on commence les calculs dans l'ordre suivant :

1. tout d'abord, on effectue les calculs entre parenthèses. Si il y a plusieurs parenthèses, on commence par les parenthèses les plus internes.
2. ensuite, on effectue les calculs avec des puissances
3. puis les multiplications et divisions
4. enfin les additions et soustractions.

Dans un même ordre de priorité, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Exemple 1
Effectuer les calculs suivants :

$A = 3\times 4^2+5\times 8\div(6-2)$ $\quad B=\left(\left(\dfrac{5}{8}\right)^2\times(3^2-10)\right)\times 5$ $\quad C=7\div 8\div 5$

$D=8\div 7\times 2$ $\quad E=\left(2\times\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2\right)\div(-9)$ $\quad F=-10\div\left(\left(3\times\dfrac{2}{3}-2\right)\times\dfrac{6}{7}+2\right)\times 5$

$G=8\div 2(2+2)$

3 Les nombres entiers

Définition 2 : multiple, diviseur

Soient a et b deux entiers relatifs.
S'il existe un entier relatif k tel que $a=kb$, on dit que :
a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a.

Exemple 2
Déterminer :
a) les multiples de 3
b) les multiples de 13
c) les diviseurs de 24
d) les diviseurs de 18.

Propriété 2 : critère de divisiblilité

- Un entier est divisible par 10 si et seulement s'il se termine par 0.
- Un entier est divisible par 2 si et seulement s'il se termine par un chiffre pair.
- Un entier est divisible par 5 si et seulement s'il se termine par 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9
- Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
- Un entier est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

Exemple 3

1. Remplir le tableau suivant :

n est divisible par	105	31	417	133	412	924	1053	720
10								
2								
4								
5								
3								
9								
11								

2. Même question avec les nombres (on reproduira un tableau semblable à celui de la question précédente) :

3258	510	990	528	97	945	280	255

Définition 3 : nombres premiers

Un nombre entier naturel est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs

Remarque

- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur (lui-même)
- 2 est le plus petit nombre premier et est le seul qui soit pair.

Exemple 4

Déterminer si les nombres suivants sont premiers :

1. 15 ; 91 ; 271 ; 1001 ; 4175
2. 18 ; 103 ; 259 ; 241 ; 15890

Remarque

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2	3	5	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97			

Propriété 3 : décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non premier strictement supérieur à 1 peut s'écrire de manière unique comme produit de nombres premiers.

Exemple 5

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

1. 72 ; 150 ; 18375 ; 1260 ; 4175
2. 48 ; 310 ; 504 ; 440; 462

Propriété 4 : division euclidienne

Soit x et y deux entiers naturels avec y non nul.
Alors il existe un unique couple $(q; r)$ d'entiers naturels tel que $x = q \times y + r$ et $0 \leqslant r < y$

Exemple 6

1. Poser les divisions euclidiennes suivantes et écrire l'égalité obtenue

$A = 95 \div 12$	$B = 364 \div 13$	$C = 1540 \div 11$
$D = 3658 \div 24$	$E = 5789 \div 87$	$F = 1697 \div 46$

2. Les égalités suivantes (qui sont vraies) traduisent-elles une division euclidienne ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?
On justifiera avec soin la réponse.

a) $1364 = 52 \times 26 + 12$ b) $1364 = 53 \times 26 - 14$

c) $3124 = 279 \times 11 + 55$ d) $25470 = 384 \times 66 + 126$

4 Les nombres rationnels : ensemble $\mathbb{Q}$

Définition 4 : nombre rationnel

Un nombre rationnel est le quotient de deux nombres entiers relatifs a et b ($b \neq 0$)
$\dfrac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne un produit égal à a.

Propriété 5 : égalité de deux rationnels

Soit a,b et c trois entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$: alors $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas si on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

Définition 5 : fraction irréductible

Une fraction est dite irréductible si elle ne peut plus se simlplifier, c'est-à-dire si le numératuer et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1

Exemple 7
Rendre les fractions suivantes irréductibles :

a) $\dfrac{108}{84}$ b) $\dfrac{180}{1620}$ c) $\dfrac{693}{4158}$ d) $\dfrac{55}{605}$ e) $\dfrac{990}{1584}$

f) $\dfrac{385}{231}$ g) $\dfrac{648}{2268}$ h) $\dfrac{4950}{5445}$ i) $\dfrac{1134}{1458}$ j) $\dfrac{847}{1155}$

Propriété 6 : caractérisation de l'égalité

Soit a,b, c et d quatre nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- Si $a \times d = b \times c$ alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$
- Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

autrement dit : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si et seulement si $a \times d = b \times c$

Propriété 7 : somme et différence de rationnels

Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs avec $c \neq 0$

Alors $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ et $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

Remarque
Pour ajouter ou soustraire deux quotients, il est nécessaire d'abord de les réduire au même dénominateur.

Exemple 8
Calculer les sommes et différences suivantes :

$A = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4}$ $B = \dfrac{5}{6} - \dfrac{3}{4}$ $C = \dfrac{7}{9} - \dfrac{4}{36}$

$D = \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12}$ $E = \dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{21}$ $F = \dfrac{2}{9} + \dfrac{8}{7}$

$G = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}$ $H = \dfrac{1}{7} - \dfrac{3}{5} - \dfrac{5}{6}$

Propriété 8 : produit et quotient de rationnels

Soit a,b, c et d quatre nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Alors $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$ et $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Exemple 9
Calculer les produits et les quotients suivants :

$A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{7}$ $B = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{4}{18} \times \dfrac{3}{14}$ $C = 3 \times \dfrac{9}{2}$

$D = \dfrac{15}{17} \times \dfrac{17}{19} \times \dfrac{19}{21} \times \dfrac{21}{23}$ $E = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2019}{2020}$ $F = \dfrac{3}{4} \div \dfrac{1}{2}$

$G = 3 \div \dfrac{9}{2}$ $H = \dfrac{9}{2} \div 3$

Exemple 10
Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivants :

$$A = \dfrac{1}{2 - \dfrac{2}{3 + \dfrac{3}{4 - \dfrac{4}{5}}}} \qquad B = \dfrac{5}{5 - \dfrac{4}{4 - \dfrac{3}{3 + \dfrac{3}{2}}}}$$

$$C = \dfrac{3 - \dfrac{5}{7} + \dfrac{1}{2}}{3 + \dfrac{5}{7} - \dfrac{1}{2}} \qquad D = \dfrac{5 + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}}{5 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}}$$

5 Les nombres décimaux : ensemble $\mathbb{D}$

Définition 6 : nombre décimal

Un nombre est décimal si et seulement s'il admet un développement décimal limité, c'est-à-dire si et seulement s'il possède une écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Propriété 9 : caractérisation des nombres décimaux

Un nombre est décimal si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire sous la forme $\dfrac{a}{10^k}$ où a est un entier et k un entier naturel.

Exemple 11
Écrire les décimaux suivants sous forme de fraction décimale :

1. $2,405$ $\quad -32,57$ $\quad 0,159$ $\quad -0,00931$ $\quad 45,007$
2. $-3,145$ $\quad 3597,12$ $\quad 1,005$ $\quad 0,00089$ $\quad 56,00801$

Propriété 10 : caractérisation des rationnels décimaux

Une fraction irréductible est un nombre décimal si et seulement si son dénominateur ne comporte que des facteurs premiers égaux à 2 ou à 5.

Remarque
Les nombres rationnels ont un développement décimal périodique.
Par exemple : $\dfrac{1}{7} = 0,142852\ 142582\ 142852\ \ldots.. = 0,\overline{142852}$

Exemple 12
Déterminer les nombres décimaux parmi les nombres suivants :

$A = -\dfrac{23}{50}$ $\quad B = \dfrac{86}{75}$ $\quad C = -56,879$

$D = 1,2568$ $\quad E = -48$ $\quad F = 5480$

$G = \dfrac{5}{7}$ $\quad H = \dfrac{225}{15}$ $\quad I = 4,5 \times 10^{-5}$

$J = -3,2 \times 10^{15}$ $\quad K = -\dfrac{120}{325}$ $\quad L = \dfrac{714}{210}$

Définition 7 : notation scientifique

L'écriture (ou la notation) scientifique d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal dont la partie entière est comprise entre 1 et 9, et n un nombre entier relatif.

Remarque En particulier :

$$100 = 1 \text{ centaine} = 10^2$$

$$1\,000 = 1 \text{ millier} = 10^3$$

$$1\,000\,000 = 1 \text{ million} = 10^6$$

$$1\,000\,000\,000 = 1 \text{ milliard} = 10^9$$

$$\frac{1}{10} = 1 \text{ dixième} = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = 1 \text{ centième} = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{1000} = 1 \text{ millième} = 10^{-3}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = 1 \text{ millionième} = 10^{-6}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000} = 1 \text{ milliardième} = 10^{-9}$$

Exemple 13
Donner l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

1. $A = 0{,}000\,472$
2. $B = 8\,025 \times 10^{-2}$
3. $C = 5{,}12 \times 10^3 - 5{,}234 \times 10^{-1}$
4. $D = 2{,}13 \times 10^4 - 573{,}1 \times 10^{-2}$
5. $E = 0{,}004\,158 \times 10^{12}$
6. $F = 4\,723\,000$
7. $G = 285 \times 10^{-3} + 0{,}0058 \times 10^2$
8. $H = -8\,237 \times 10^{-2} + 15\,102{,}48 \times 10^{-5} + 513{,}27$
9. $I = \dfrac{3{,}5 \times 10^{-8} \times 1{,}7 \times 10^{14}}{28 \times 10^{-4}}$
10. $J = \dfrac{1{,}2 \times 10^{-7} \times 0{,}45 \times 10^5}{0{,}36 \times 10^{11}}$

6 Les nombres réels : ensemble $\mathbb{R}$

Il existe beaucoup de nombres qui ne sont pas rationnels (donc ni décimaux, ou entiers) : $\sqrt{2}$ et π par exemple. L'ensemble des entiers, décimaux, rationnels et des nombres comme $\sqrt{2}$ et π s'appelle l'ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.
La construction de l'ensemble des réels est relativement complexe, nous ne l'étudierons donc pas cette année. Les propriétés usuelles sur l'ordre, la somme, la différence, le produit et le quotient des nombres rationnels s'étendent aux nombres réels.

6.1 Puissances entières d'un nombre réel

Définition 8 : puissance entière d'un nombre réel

Soit x un nombre réel et n un entier relatif. On définit x^n par :

- $x^1 = x$
- Si $n > 0$, $x^n = x \times x \times x .... \times x$ (n fois)
- Si $x \neq 0$ et $n > 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{x \times x \times x .... \times x}$ (n fois)
- Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$

Remarque
Le nombre 0^0 n'existe pas a priori.

Propriété 11 : règles de calculs sur les puissances

Soit a et b deux nombres réels non nuls, et m et n deux nombres entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

ATTENTION
$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ en général

Exemple 14
Simplifier les nombres suivants sous la forme $\pm a^\alpha b^\beta c^\gamma$ avec a, b et c entiers naturels premiers et α, β et γ entiers relatifs.

$A = \left(2 \times 10^{-3}\right)^3$

$B = 2 \times 10^{-8} \times 3 \times 10^6$

$C = \dfrac{9 \times (10^2)^3 \times 2^2 \times 10^8 \times 10^{-5}}{(10^9)^2}$

$D = \dfrac{9^2 \times 4^{-3}}{2^{-3} \times 3^3}$

$E = \dfrac{\left(5^2 \times 11^{-5}\right)^{-3}}{\left(11^5 \times 5^{-3}\right)^2}$

$F = \dfrac{\left(3^5 \times 7^{-3}\right)^4}{7^5 \times 3^{-4}}$

$G = \dfrac{2^{-5} \times (-6)^3 \times 3^{-4}}{-9^{-2} \times 8^{-4}}$

$H = \dfrac{-5^3 \times (-2)^4 \times 4^4}{10^{-2} \times 25^3 \times 8}$

$I = \dfrac{1}{9} \times 3^n$

$J = \dfrac{4^n}{2^n}$

$K = 5^{n+1} - 5^n$

$L = \dfrac{2^n}{2^{n-1}}$

6.2 Développement décimal et approximations

Propriété 12 : développement décimal d'un réel

Tout nombre réel admet un unique développement décimal propre, c'est-à-dire ne finissant pas une infinité de chiffres 9.

Remarque :
On a les égalités suivantes : $1 = 0,99999999999.....$
$2,57 = 2,56999999999....$

Définition 9 : encadrement d'un réel

Encadrer un réel x, c'est déterminer deux réels a et b tels que : $a \leqslant x \leqslant b$.
Le nombre $b - a$ est appelé amplitude de l'encadrement.

Remarques

- Dans la pratique, a et b sont souvent des nombres décimaux. Mais rien n'empêche par exemple d'encadrer $1,5$ à l'aide des nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
- Dire que a et b encadrent un réel x équivaut à dire que le réel x appartient à l'intervalle fermé $[a, b]$.
- Par exemple, les nombres décimaux $1,41$ et $1,42$ encadrent $\sqrt{2}$. L'amplitude de l'encadrement est alors égale à 0,01 soit la différence entre 1,42 et 1,41. On parle alors d'encadrement au centième.

Définition 10 : approximations d'un réel

Soient x un réel et α un réel strictement positif.

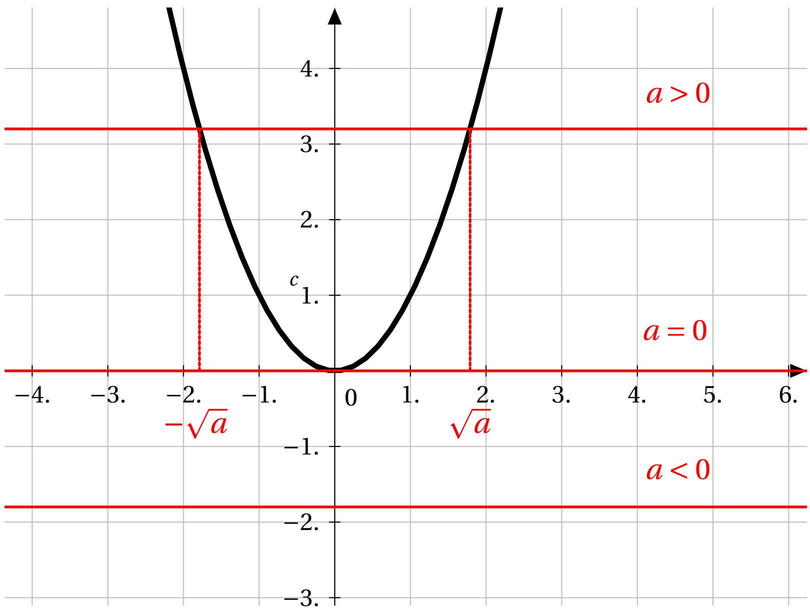
- On dit que a est une approximation de x à α près si on a la double inéaglié suivante :
$$a - \alpha \leqslant x \leqslant a + \alpha.$$
- On dit que a est une approximation par défaut de x à α près si on a la double inégalité suivante :
$$a \leqslant x \leqslant a + \alpha.$$
- On dit que a est une approximation par excès de x à α près si on a la double inégalité suivante :
$$a - \alpha \leqslant x \leqslant a.$$

Exemple 15
À l'aide éventuellement de la calculatrice, donner les approximations ou encadrements suivants :

1. a est une approximation à 10^{-3} près de $\dfrac{1}{7}$
2. b est une approximation à 10^{-1} près de $\dfrac{4}{9}$
3. c est une approximation par excès à 1 près de $25,726$
4. d est une approximation par défaut à 1 près de $35,789$
5. e est une approximation par excès à 10^{-2} près de $\sqrt{35}$
6. f est une approximation par défaut à 10^{-1} près de $\sqrt{17}$
7. Déterminer un encadrement au centième de $\sqrt{135}$.
8. Déterminer un encadrement au dixième de $\dfrac{145}{337}$

6.3 Racines carrées

Point de vue fonctionnel
On considère la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$:



On constate graphiquement que :

- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : $x = 0$.
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions de signes contraires.

Définition 11 : racine carrée d'un réel positif

Soit a un nombre positif ou nul. L'unique nombre positif ou nul x tel que $x^2 = a$ est appelé racine carrée de a. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$

Remarques

— Si $a<0$ alors le nombre réel $\sqrt{a}$ n'existe pas.

— La touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ ne fournit en général qu'une valeur approchée.

— Les carrés des entiers (1,4,9,16,25,...) sont appelés carrés parfaits.

Propriété 13 : règles de calcul sur les radicaux

- Si $a>0$ alors $\sqrt{a^2}=a$
- Si $a<0$ alors $\sqrt{a^2}=-a$
- Si $a\geq 0$ et $b\geq 0$ alors $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- Si $a\geq 0$ et $b>0$ alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ATTENTION

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ en général}$$

Exemple 16

Calculer les nombres suivants (on les mettra si possible sous la forme de $a+b\sqrt{c}$ avec a,b et c entiers) :

1. $A=2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$
2. $B=2\sqrt{32}-3\sqrt{50}+6\sqrt{8}$
3. $C=(2\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+\sqrt{5})$
4. $D=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
5. $E=(3\sqrt{2}-1)^2-(2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$
6. $F=(2\sqrt{5}-3)^2-(2\sqrt{5}+3)^2$

Exemple 17

Exprimer les nombres suivants sous forme d'un quotient sans radical au dénominateur.

$A=\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$

$B=\dfrac{14}{3\sqrt{7}}$

$C=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

$D=\dfrac{2+\sqrt{10}}{1+\sqrt{10}}$

$E=\dfrac{2}{4-\sqrt{2}}$

$F=\dfrac{3}{4\sqrt{2}-3}$

$G=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$H=\dfrac{2\sqrt{5}+3}{1+\sqrt{5}}$

$I=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

$J=\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

7 Pourcentages

Définition 12 : pourcentage d'une quantité

Le pourcentage p d'une quantité Q par rapport à une quantité de référence R est donné par l'égalié :

$$\frac{p}{100} = \frac{Q}{R}.$$

Propriété 14 : application d'un pourcentage

Prendre t % d'une quantité Q c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Propriété 15 : pourcentage d'augmentation ou de diminutuin

Augmenter une quantité Q de t % c'est la multiplier par $1+\frac{t}{100}$.
Diminuer une quantité Q de t % c'est la multiplier par $1-\frac{t}{100}$.

Exemple 18

1. Quel pourcentage représente 25 pour le nombre 200.
2. Même question avec $35,2$ pour le nombre 44.
3. Le nombre 45 diminue de 35%. Combien vaut-il ?
4. Même question avec une augmentation de 28% pour le nombre 407
5. Un commerçant vous accorde une réduction de 20 € sur une marchandise dont le prix est égal à 180 €. Que représente en pourcentage cette réduction ?
6. Votre magasin vous accorde une réduction de 15 % sur l'ensemble des articles signalés par une pastille verte. Vous repérez un article à 79 €. Quel est le prix que vous paierez en caisse ?
7. Votre propriétaire augmente le loyer de votre appartement, qui s'élève à 650 € de $2,4$ %. Quel sera le nouveau prix du loyer ?
8. Les effectifs d'une entreprise ont progressé de 57 personnes entre le 31-12-2017 et le 31-12-2018 ce qui représente une hausse de 3 %. Calculer les effectifs de cette entreprise au 31-12-2018.
9. Un objet dans le magasin A a augmenté de 4 % puis de 3 % alors que dans le magasin B il a augmenté de 5 % puis de 2 %.
   Dans quel magasin l'objet a-t-il le moins augmenté ?
10. Un objet a augmenté de 10% puis a diminué de 10 %. Est-il revenu à son prix initial ? Sinon, quel est le pourcentage d'augmentation ou de diminution ?

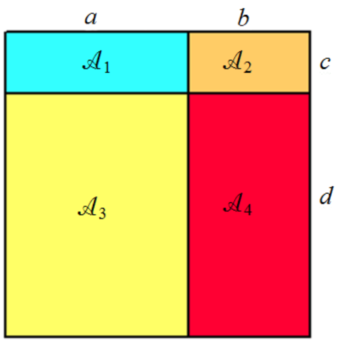
8 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Propriété 16 : distributivité

Soit a, b, c et d des nombres réels. Alors :

- $a(c+d) = a \times c + a \times d$
- $(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Illustration



Propriété 17 : identités remarquables

Soit a et b deux nombres réels. Alors :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Définition 13 : développer une expression

Développer une expression, c'est la mettre sous la forme d'une somme.

Exemple 19
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = -(x-3) + 3(2x-1) - 2(2x-3)$
2. $B(x) = x - 2 - 5(x-3) - 3(-3x-4)$
3. $C(x) = x(x-1)(x-4) - x^2(x-3)$
4. $D(x) = (3x-2)^2 - 3(4x+2)^2$
5. $E(x) = (5x+1)^2 - 3(x+3)^2$
6. $F(x) = (x-1)^2(x+2) - (2x+1)^2(x+1)$
7. $G(x,y) = \left(3x-2y\right)^2 - 5\left(x+3y\right)^2$
8. $H(x,y) = 4(x+2y)^2 - 3(2x-y)^2$

Définition 14 : factoriser une expression

Factoriser une expression, c'est la mettre sous la forme d'un produit.

Exemple 20
Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = (x+1)(x-3) - 2(x+1)$
2. $B(x) = (5-2x)(x-1) + x^2 - 1$
3. $C(x) = (1-2x)^2 - x^2$
4. $D(x) = 4x^2 - 1 + (2x-1)(x+1)$
5. $E(x) = 4x^2 - 8x + 4 - (x+7)^2$
6. $F(x) = x^2 - 4 + x - 2$
7. $G(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$
8. $H(x) = 5(4x+1) - (4x+1)^2$

Exemple 21
Réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

1. $A(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+3}$
2. $B(x) = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{5}{x-2}$
3. $C(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{2x+1}$
4. $D(x) = \dfrac{8x}{3x+1} + \dfrac{5}{x-2}$
5. $E(x) = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{5x}{x+1} - \dfrac{3x+1}{x^2-1} + 2$
6. $F(x) = \dfrac{2}{3x-1} - \dfrac{3x}{3x+1} - \dfrac{4}{9x^2-1} + 1$

9 Égalités d'expressions littérales

Définition 15 : égalité de deux expressions

Deux expressions littérales $A(x)$ et $B(x)$ sont égales si elles prennent la même valeur quelle que soit la valeur de x.

Remarque
Pour justifier l'égalité de deux expressions, il ne suffit pas d'étudier les valeurs qu'elles prennent pour quelques valeurs de x !

Contre-exemple
Soit $A(x) = (x-3)(x+2)(x-1)$ et $B(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$
On a $A(3) = B(3) = 0$ et $A(-2) = B(-2) = 0$. On pourrait donc penser que $A(x) = B(x)$.
En revanche, $A(1) = 0$ et $B(1) = 18$ donc $A(x) \neq B(x)$

Pour justifier l'égalité de deux expressions littérales, on cherche à les mettre sous la même forme.

Exemple 22

1. Soit $D_1(x) = \left(4x^2-1\right)(x+3)-(x-1)(2x+1)$ et $D_2(x) = (2x+1)\left(2x^2+4x-2\right)$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $D_1(x) = D_2(x)$
2. Soit $E_1(x) = (2x+1)(x-3)(3x-1)$ et $E_2(x) = 3+x(-4+x(-17+6x))$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $E_1(x) = E_2(x)$
3. Soit $F_1(x) = \dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ et $F_2(x) = x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $F_1(x) = F_2(x)$

Un peu d'histoire

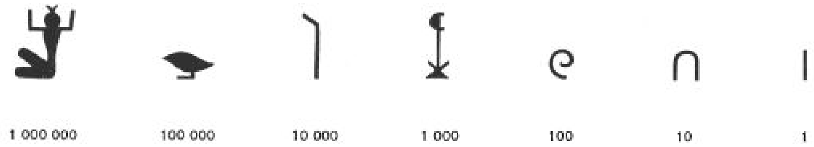
Le comptage est apparu de façon certaine en 30 000 avant Jésus-Christ. En effet on a retrouvé différents os d'animaux comportant des encoches, comme l'os d'Ishango découvert en 1950 en République démocratique du Congo datant de 20 000 ans avant Jésus-Christ.

Os d'Ishango

Les premiers calculs apparurent en - 8 000 au Moyen-Orient. On pense qu'ils s'effectuaient en utilisant des cailloux (qui se dit "calculus" en latin d'où l'origine du mot calcul).
Vers - 3500, les Babyloniens inventèrent la première numération écrite connue. Elle se fonde sur la base 60. Ils utilisaient des tablettes d'argile pour écrire leurs nombres.

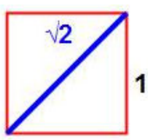
Tablette d'argile babylonienne

Les Babyloniens connaissaient les fractions ainsi que les Egyptiens (3000 à 0 avant JC) mais ces derniers ne connaissaient que les fractions de numérateur 1.



Les nombres égyptiens en écriture hiéroglyphe

Les Grecs ont été les premiers mathématiciens à se poser des questions sur la nature des nombres. Ils ont démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel en effectuant un raisonnement par l'absurde, en ne considérant que des nombres pairs et impairs. Cette découverte ouvrit probablement une crise profonde chez les mathématiciens et les philosophes grecs. Une légende, plusieurs fois rapportée, indique qu'un pythagoricien, nommé Hippase, périt noyé pour avoir révélé aux profanes l'incommensurabilité de la diagonale et le côté d'un carré. Cette découverte allait à l'encontre de l'école de Pythagore qui voulait que tout était nombre (nombre entier bien sûr!).



$\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale du carré de côté unité

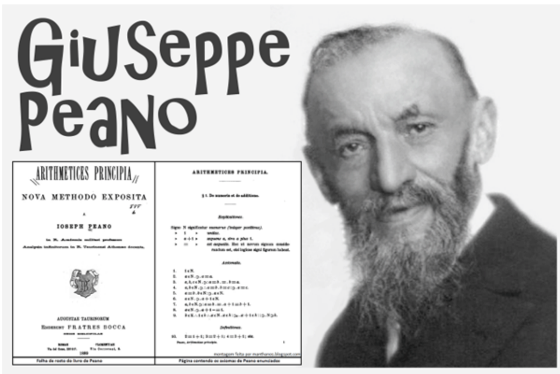
Il a fallu attendre le XVI^e siècle pour que Nicolas Stevin (1548 - 1620) introduise le système décimal. Dans son ouvrage intitulé "La Disme", il expose la manière de calculer en base 10. Les notations ont mis quelques siècles pour se stabiliser. Stevin notait

19⓪1①7②8③

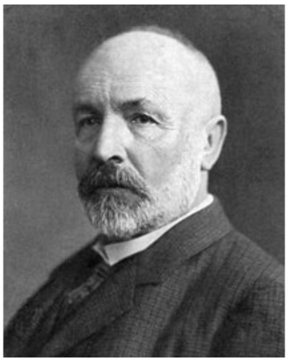
Notation de Stevin pour 19,178

Au XIX^e siècle, les mathématiciens sentirent le besoin de définir correctement la notion de nombre, en particulier celui d'entier naturel et celui de nombre réel.
La première définition axiomatique d'entier naturel est due à Giuseppe Peano (1858-1932). Celle-ci comportait cinq axiomes :

- 0 désigne un nombre appelé zéro élément de $\mathbb{N}$
- si n est un nombre entier naturel alors n admet un unique successeur qui lui est distinct et qui est aussi un entier naturel
- 0 n'est le successeur d'aucun nombre
- deux entiers naturels dont les successeurs sont égaux sont égaux
- si un ensemble E d'entiers naturels contient 0 et le successeur de tout nombre de E alors E est l'ensemble des entiers naturels



A la fin du XIX^e siècle, plusieurs mathématiciens définirent la notion de nombre réel (Dedekind, Cantor, Hilbert). Mais la construction des nombres réels nécessite des connaissances mathématiques assez élevées (niveau fin license/master).


R.Dedekind(1831-1916) G.Cantor(1845-1918) D.Hilbert(1862-1943)