

Chapitre 2 : Géométrie

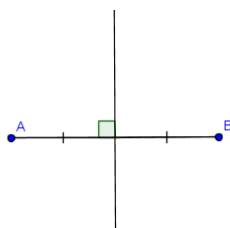
1 Géométrie plane

1.1 Droites remarquables d'un triangle

1.1.1 Médiatrice

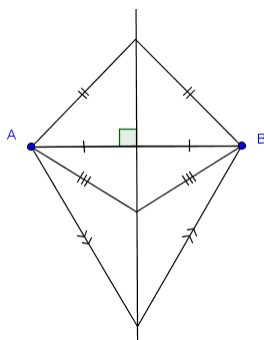
Définition 1 : médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire au segment $[AB]$ et qui passe par le milieu de $[AB]$.



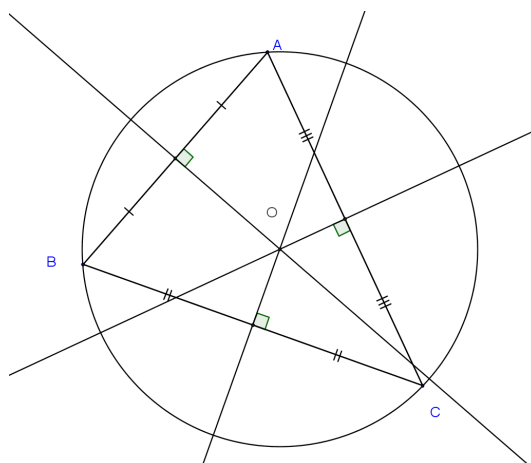
Propriété 1 : caractérisation de la médiatrice

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B.



Propriété 2 : concours des médiatrices et cercle circonscrit

Les médiatrices des côtés d'un triangle (ou les médiatrices d'un triangle) sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Exemple 1

1. Deux cercles de centre O et O' se coupent en deux points A et B.
Montrer que les droites (AB) et (OO') sont perpendiculaires.
2. ABC est un triangle isocèle en A et on construit extérieurement à ce triangle un triangle équilatéral BCD.
Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
3. ABC est un triangle isocèle en A et on construit extérieurement à ce triangle un rectangle BCDE de centre O.
Démontrer que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

1.1.2 Médiane**Définition 2 : médiane d'un triangle**

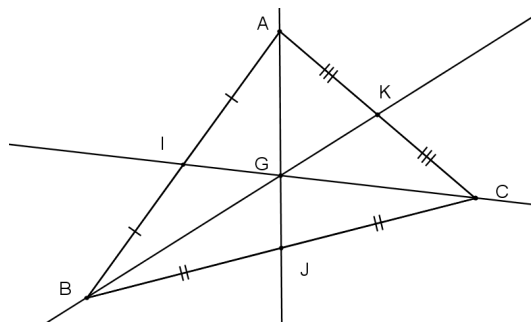
La droite passant par un sommet d'un triangle et passant par le milieu du côté opposé est appelée médiane du triangle.

Propriété 3 : concours des médianes

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

Propriété 4 : position du centre de gravité

Le centre de gravité du triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ des médianes en partant du sommet.

**Exemple 2**

1. Soit ABCD un parallélogramme. On note I le milieu de [BC] et J celui de [AB]. Les droites (AI) et (CJ) se coupent en K.
Démontrer que les points B, K et D sont alignés.
2. Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On note E le symétrique de C par rapport à B, G le point d'intersection des droites (AB) et (OE) et I le milieu de [AE].
Démontrer que G est le centre de gravité du triangle AEC.
En déduire que les points C, G et I sont alignés.
3. Soit ($\mathcal{C}$) un cercle de diamètre [AB] et de centre O. On note M un point de ($\mathcal{C}$) distinct de A et de B, L le symétrique de A par rapport à M, I le point d'intersection des droites (OL) et (BM).
Démontrer que I est le centre de gravité du triangle ABL.
Soit J le milieu de [BL]. Démontrer que les points A, I et J sont alignés.

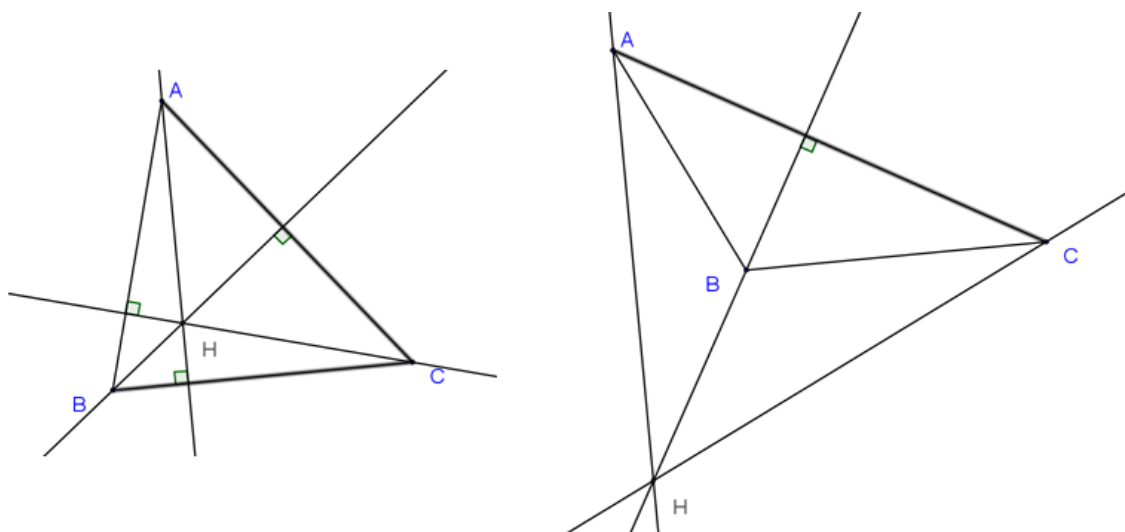
1.1.3 Hauteurs

Définition 3 : hauteur d'un triangle

La droite passant par un sommet d'un triangle et perpendiculaire au côté opposé est appelée hauteur du triangle.

Propriété 5 : concours des hauteurs

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.



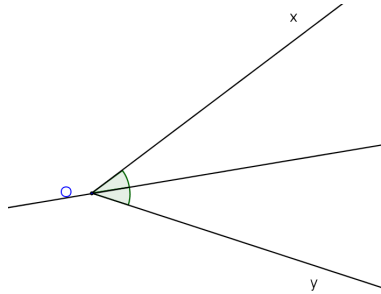
Exemple 3

1. ABCD est un rectangle de centre O. La médiatrice du segment [AC] coupe la droite (AB) en E et la droite (BC) en F.
Démontrer que les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.
2. Soit ABCD un losange de centre O. La perpendiculaire à [AB] passant par D coupe (AO) en I.
Démontrer que les droites (IB) et (AD) sont perpendiculaires.
3. ABC est un triangle rectangle en A et on note M un point quelconque du segment [BC] et K le pied de la hauteur issue de A. La parallèle à (AB) passant par M coupe (AK) en H.
Démontrer que les droites (CH) et (AM) sont perpendiculaires.

1.1.4 Bissectrices

Définition 4 : bissectrice d'un angle

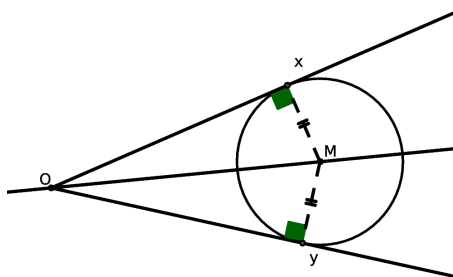
La bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$ est l'axe de symétrie qui échange Ox en Oy .



Propriété 6 : caractérisation de la bissectrice

La bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$ est l'ensemble des points à même distance des demi-droites Ox et Oy :

M est sur la bissectrice si et seulement si $d(M, Ox) = d(M, Oy)$.



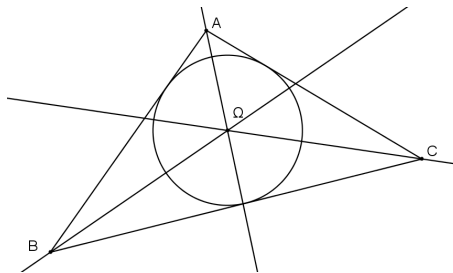
Remarque

On peut aussi formuler cette propriété de la manière suivante :

La bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$ est l'ensemble des centres de cercles inscrits dans l'angle (tangents aux deux côtés de l'angle).

Propriété 7 : concours des bissectrices et cercle inscrit

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

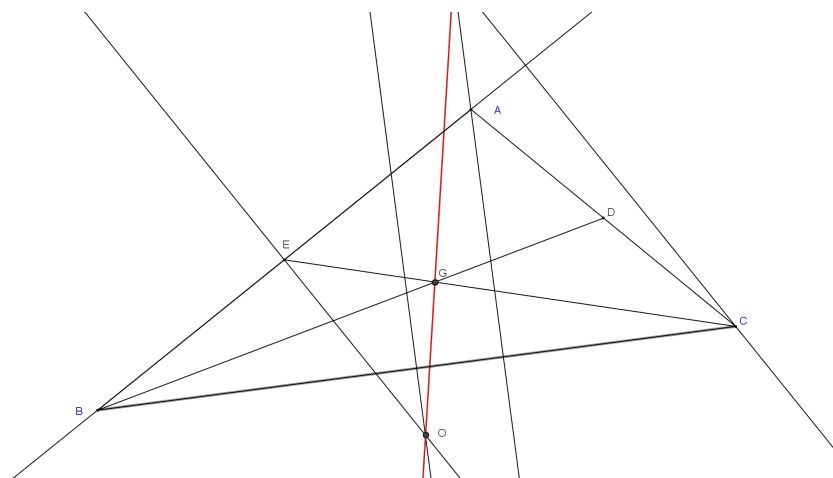


Exemple 4

1. On considère un triangle ABC et deux points D et E appartenant respectivement aux côtés [AB] et [AC]. Dans le triangle ABC les bissectrices issues de B et C se coupent en P et dans le triangle ADE les bissectrices issues de D et E se coupent en Q. Démontrer que les points A, Q et P sont alignés.
2. ABC est un triangle et M est un point de [BC]. O et O' sont les centres des cercles inscrits dans les triangles ABM et AMC. Démontrer que le triangle OO'M est rectangle.

Propriété 8 : droite d'Euler

Dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.



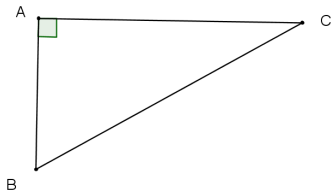
1.2 Théorèmes de Pythagore et de Thalès

1.2.1 Théorème de Pythagore et réciproque

Propriété 9 : théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

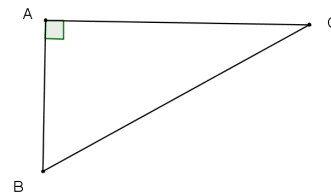
Autrement dit, si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Propriété 10 : réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Autrement dit, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.



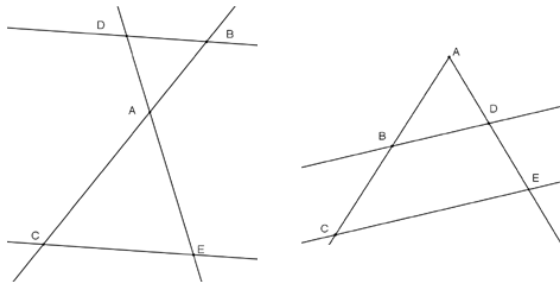
Exemple 5

1. Soit ABC un triangle isocèle en C. On construit à l'extérieur du triangle ABC, un parallélogramme BCDE. On donne les distances suivantes : $BC = 5,6$; $BE = 3,3$ et $AD = 6,5$. Démontrer que le triangle ADC est rectangle.
2. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 53$ et $AC = 45$. Calculer les longueurs des médianes (en tant que segment) issues de B et C.
3. Soit un parallélépipède rectangle de côtés 5, 7 et 12. Calculer la longueur de ses diagonales.

1.2.2 Théorème de Thalès et réciproque

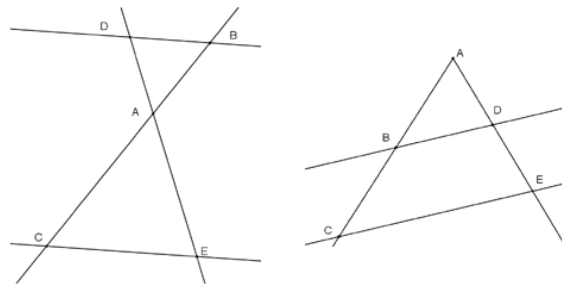
Propriété 11 : Théorème de Thalès

Si A, B, C sont alignés, si A, D, E sont alignés et si les droites (BD) et (CE) sont parallèles, alors on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$.



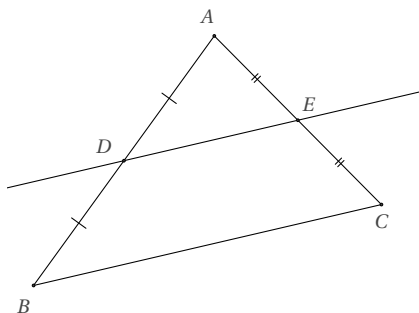
Propriété 12 : réciproque du théorème de Thalès

Si A, B, C sont alignés dans cet ordre, si A, D, E sont alignés dans cet ordre et si $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, alors les droites (BD) et (CE) sont parallèles.



Propriété 13 : théorème de la droite des milieux

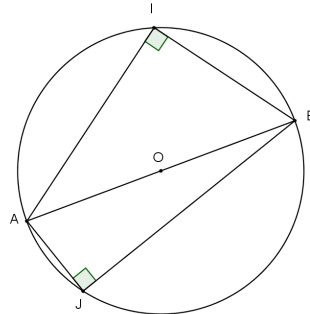
La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, est parallèle au troisième côté de ce triangle.



1.3 Triangle rectangle

Propriété 15 : triangle rectangle et cercle

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un triangle rectangle (en ce point).

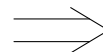
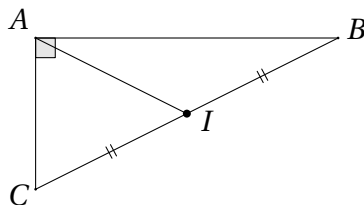


Propriété 16 : triangle rectangle et cercle circonscrit

Le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Propriété 17 : triangle rectangle et médiane

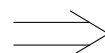
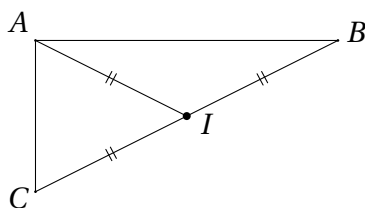
La médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure la moitié de celle-ci.



$$AI = \frac{BC}{2}$$

Propriété 18 : médiane et triangle rectangle

Si dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de celui-ci, alors ce triangle est rectangle.



$\widehat{BAC}$ droit

Exemple 7

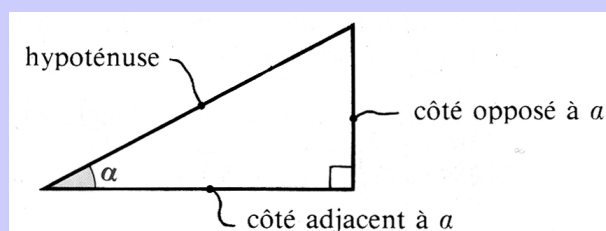
1. Deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs O et O' se coupent en A et B . I est le point diamétralement opposé à A sur $(\mathcal{C})$ et J le point diamétralement opposé à A sur $(\mathcal{C}')$.
Démontrer que I, B et J sont alignés.
2. On considère deux points I et J sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AJ) et (BI) se coupent en K et les droites (AI) et (BJ) se coupent en L .
Démontrer que les droites (KL) et (AB) sont perpendiculaires.
3. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O , I un point extérieur au cercle. On mène par I les deux tangentes au cercle. On nomme A et B les deux points de tangence. Soit C le point de $(\mathcal{C})$ tel que $[BC]$ soit un diamètre de $(\mathcal{C})$.
Démontrer que les droites (AC) et (OI) sont parallèles.

1.4 Trigonométrie dans le triangle rectangle**Définition 5 : cosinus et sinus dans le triangle rectangle**

Dans un triangle rectangle :

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

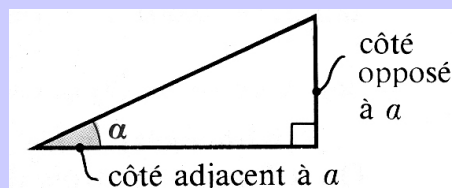
**Propriété 19 : théorème de Pythagore trigonométrique**

Pour tout angle α aigu d'un triangle rectangle, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Définition 6 : tangente dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle :

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

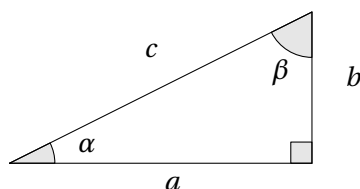


Propriété 20 : valeurs remarquables

Angle	30°	45°	60°
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemple 8

1. On considère la figure suivante :



Remplacer chaque pointillé par cos, sin ou tan de façon à obtenir une égalité exacte.

a) $b = c \times \dots\dots\alpha$

b) $c = \frac{a}{\dots\dots\beta}$

c) $a = b \times \dots\dots\beta$

d) $a = c \times \dots\dots\alpha$

e) $a = \frac{b}{\dots\dots\alpha}$

f) $c \times \sin \beta = \frac{b}{\dots\dots\alpha}$

2. On considère un triangle ABC rectangle en A . Calculer dans chaque cas la valeur exacte de la distance x et donner une valeur approchée au dixième de millimètre près à l'aide des données précisées.

a. $x = AB$ sachant que $BC = 4$ cm et $\cos \widehat{ABC} = 0,6$

b. $x = BC$ sachant $AC = 3$ cm et $\sin \widehat{ABC} = 0,45$

c. $x = AC$ sachant que $BC = 10$ cm et $\widehat{BCA} = 35^\circ$

d. $x = BC$ sachant que $AB = 6$ cm et $\widehat{BCA} = 48^\circ$

e. $x = AC$ sachant que $AB = 8$ cm et $\widehat{ABC} = 65^\circ$

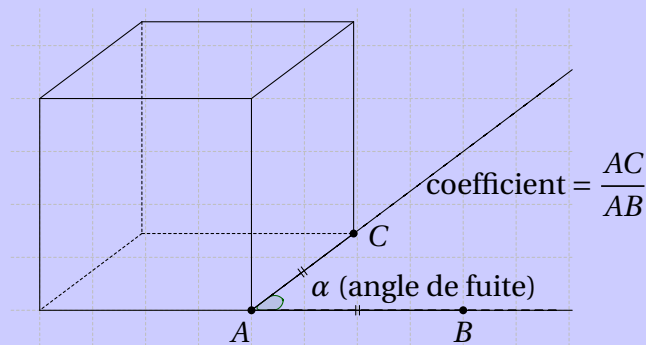
2 Géométrie dans l'espace

2.1 Perspective cavalière

Définition 7 : perspective cavalière

La perspective cavalière est une projection sur un plan (appelé plan frontal) définie par deux paramètres :

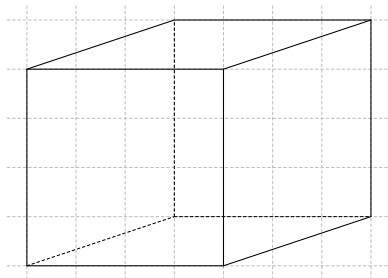
- l'angle de fuite (l'angle entre le plan frontal et une droite perpendiculaire à ce plan)
- un coefficient égal au rapport entre les mesures réelles dans le plan frontal et les mesures sur une droite perpendiculaire au plan frontal



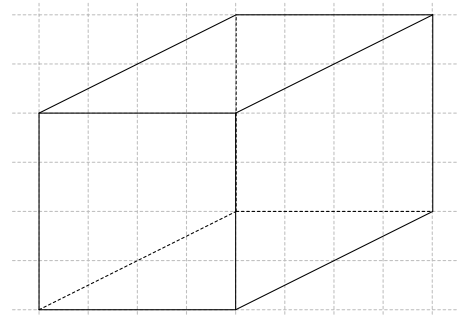
Exemple 9

Déterminer dans chaque cas les paramètres de la perspective cavalière utilisée pour dessiner un cube.

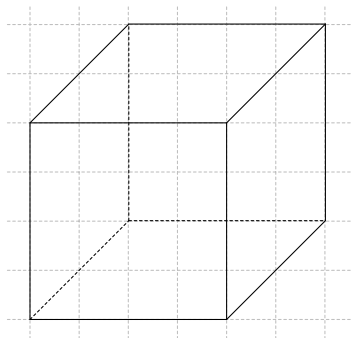
1. Dessin 1



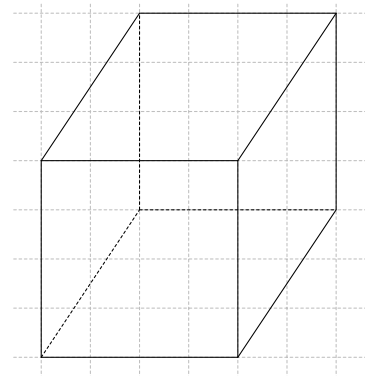
3. Dessin 3



2. Dessin 2

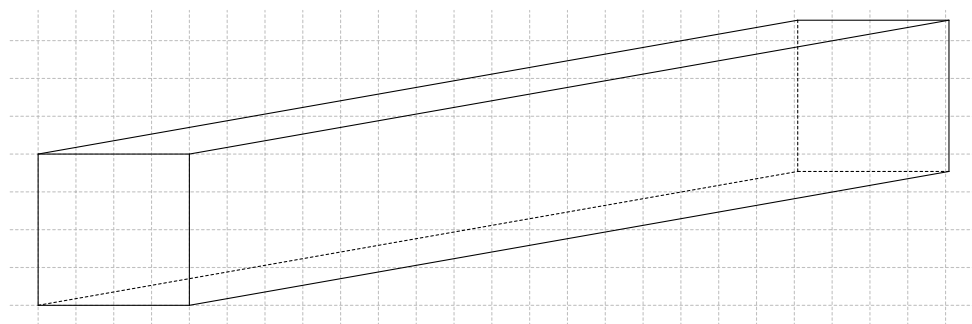


4. Dessin 4



Remarque

En général, dans une perspective cavalière, on choisit un coefficient compris entre 0 et 1. Sinon, notre perception visuelle est choquée.



Dessin d'un cube en perspective cavalière avec $\alpha = 10^\circ$ et $k = 5$

Propriété 21 : règles de la perspective cavalière

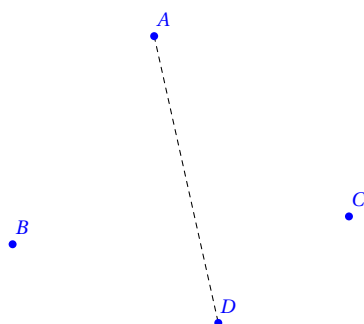
En perspective cavalière :

- deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles
- des points alignés sont représentés par des points alignés
- les proportions sont conservées, en particulier le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment image
- les mesures sont conservées dans tout plan parallèle au plan frontal (ou de face)
- dans les autres plans, les mesures ne sont pas conservées ainsi que les angles
- les segments visibles sont dessinés en traits pleins, les autres en pointillés.

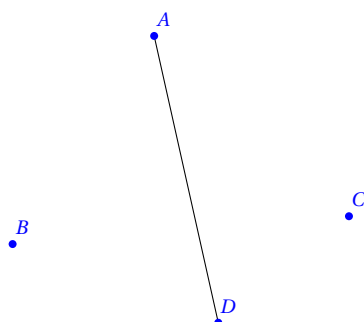
Exemple 10

1. Terminer la représentation en perspective cavalière du tétraèdre $ABCD$ ou du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

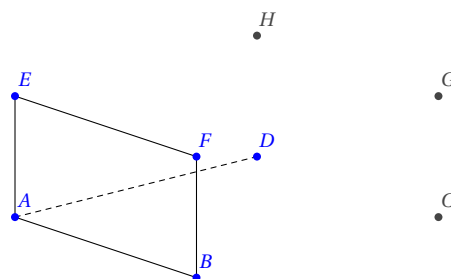
a. Dessin 1



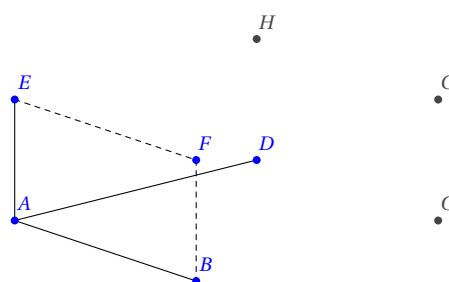
b. Dessin 2



c. Dessin 3



d. Dessin 4



2. Représenter en perspective cavalière un prisme droit de hauteur 4 et dont la base est un hexagone régulier de côté 3. (on prendra comme plan frontal un plan d'une des faces du prisme).

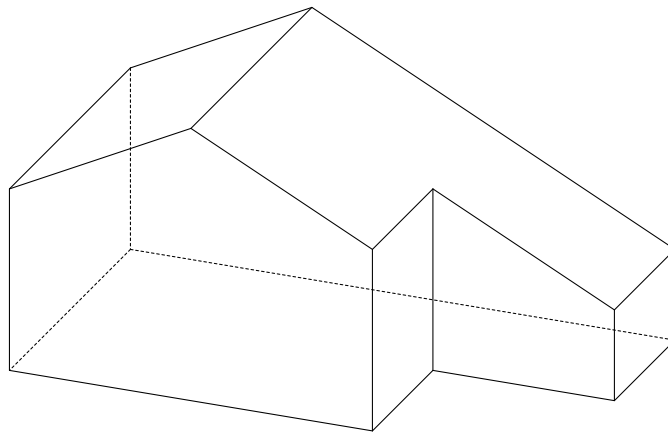
2.2 Vues d'un solide

Définition 8 : Vues d'un solide de l'espace

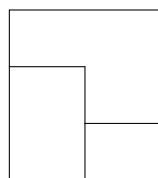
On appelle vues d'un solide la projection orthogonale de ce solide suivant différentes directions d'observation orthogonales entre elles.

Exemple 11

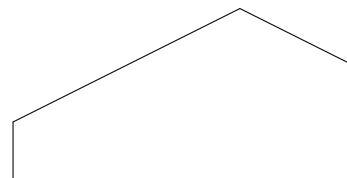
1. Voici le dessin en perspective cavalière d'un solide.
Déterminer parmi les vues ci-dessous du solide celle qui correspond à la vue de face, de derrière, de dessus, de dessous, de droite et de gauche



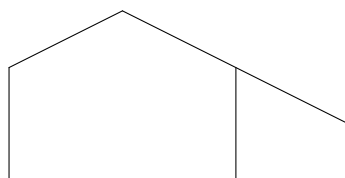
a. Vue 1



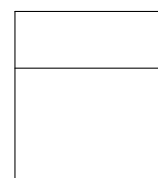
d. Vue 4



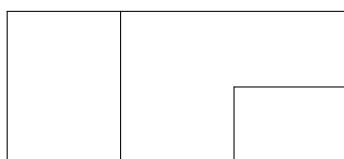
b. Vue 2



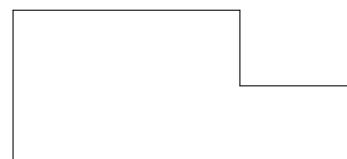
e. Vue 5



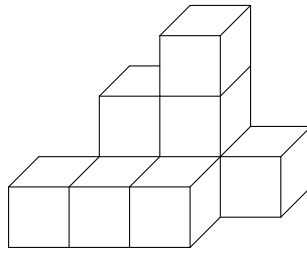
c. Vue 3



f. Vue 6



2. Dessiner les vues de dessus, de dessous, de droite, de gauche, de face et d'arrière du solide suivant (il est constitué de 9 cubes).



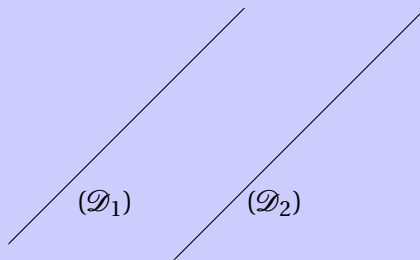
2.3 Règles d'incidence et parallélisme

Propriété 22 : premières propriétés

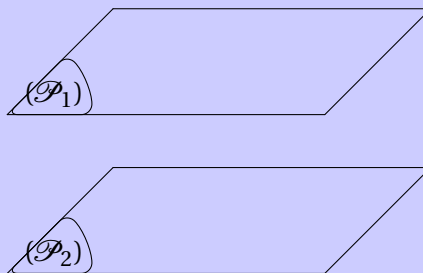
- Par trois points non alignés passe un unique plan ;
- Lorsqu'un plan contient deux points distincts A et B , il contient la droite (AB) .
- Tous les résultats de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Définition 9 : parallélisme de deux droites coplanaires ou de deux plans

Deux droites **coplanaires** de l'espace sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun ou si elles sont confondues. Dans le cas où elles n'ont aucun point commun, on dit qu'elles sont strictement parallèles.



Deux plans de l'espace sont dits parallèles s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont confondus. Dans le cas où ils n'ont aucun point commun, on dit qu'ils sont strictement parallèles.

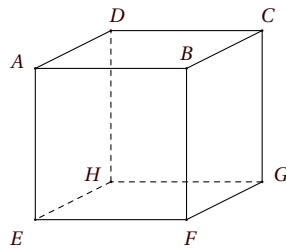


Définition 10 : plans sécants

Deux plans qui ne sont pas parallèles sont dits sécants.

Exemple 12

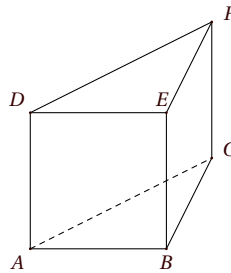
1. On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.



Déterminer :

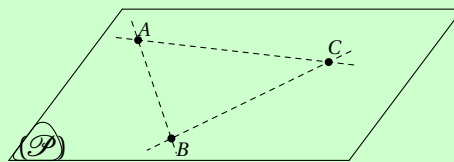
- deux droites strictement parallèles
- deux droites sécantes
- deux plans strictement parallèles
- deux plans sécants
- deux droites non coplanaires

2. Mêmes questions avec le prisme $ABCDEF$ droit ci-dessous :

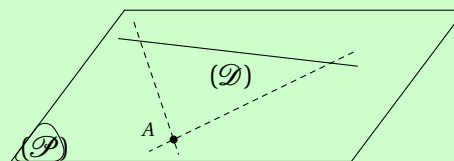
**2.4 Détermination d'un plan**
Propriété 23 : détermination d'un plan

Un plan est déterminé :

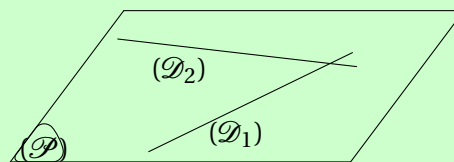
- soit par trois points non alignés ;



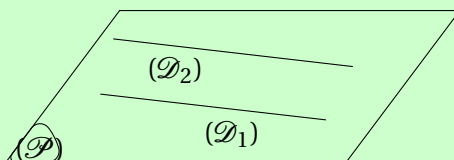
- soit par une droite et un point n'appartenant pas à la droite ;



- soit par deux droites sécantes ;



- soit par deux droites strictement parallèles

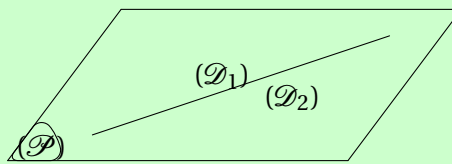


2.5 Position relative de deux droites

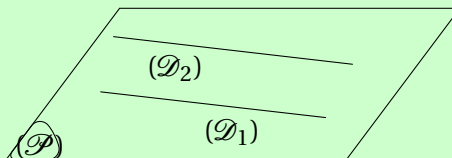
Propriété 24 : position relative de deux droites

Deux droites dans l'espace peuvent être :

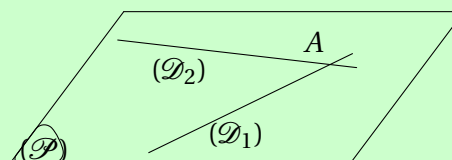
- soit confondues



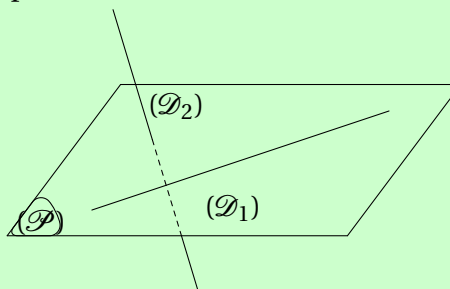
- soit strictement parallèles



- soit sécantes donc coplanaires (un seul point commun)



- soit non coplanaires (aucun point commun)

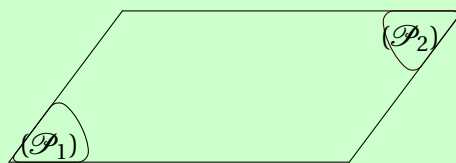


2.6 Position relative de deux plans

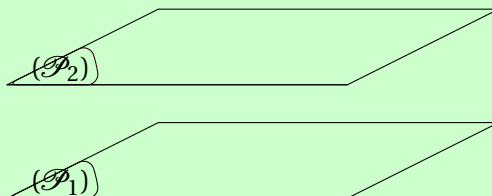
Propriété 25 : position relative de deux droites

Deux plans dans l'espace peuvent être :

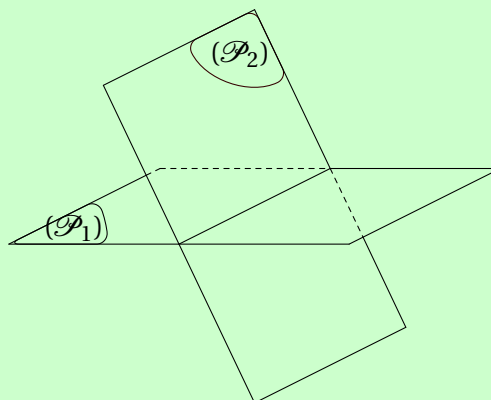
- soit confondus



- soit strictement parallèles



- soit sécants (leur intersection est une droite)



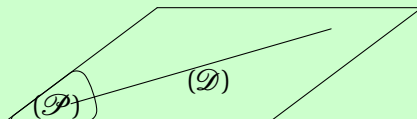
2.7 Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété 26 : position relative d'une droite et d'un plan

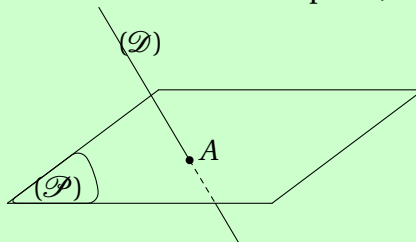
Soient $(\mathcal{D})$ une droite et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace.

Plusieurs cas sont possibles :

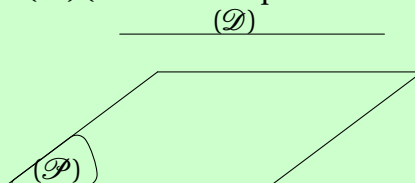
- $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$



- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants (l'intersection est réduite à un point)

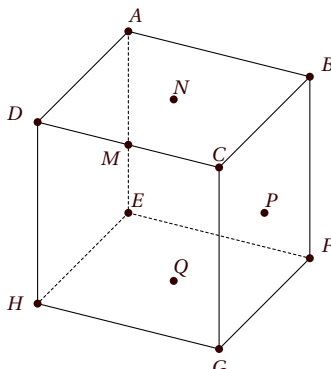


- $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$ (c'est-à-dire que l'intersection est vide)



Exemple 13

On considère un cube $ABCDEFGH$, le point N le centre de la face $ABCD$, M le milieu de $[DC]$, Q le centre de la face $EFGH$ et P celui de la face $BCGF$.



- Indiquer, dans chaque cas, si les points suivants sont coplanaires :

a) A, B, C et P	b) M, N, E et H
c) M, C, P et F	d) N, B, P et G
e) M, P, E et F	f) E, G, A et B
- Déterminer, dans chaque cas, la position relative des droites :

a) (AN) et (DC)	b) (AG) et (BH)	c) (QP) et (FG)
d) (FG) et (MP)	e) (EF) et (MP)	f) (NQ) et (DF)
- Déterminer, dans chaque cas, la position relative du plan et de la droite :

a) (ABC) et (DH)	b) (EFG) et (MQ)	c) (MNQ) et (AP)
d) (DBH) et (NF)	e) (ABE) et (QP)	f) (EHQ) et (MP)

4. Déterminer, dans chaque cas, l'intersection des deux plans :

a) (ABD) et (BCP)

b) (EHG) et (BCP)

c) (DBF) et (AEG)

d) (MNQ) et (ABC)

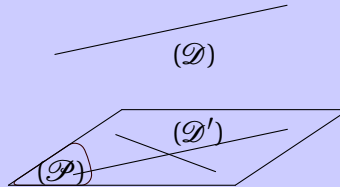
e) (MNQ) et (BCP)

f) (MNB) et (DCA)

2.8 Parallélisme

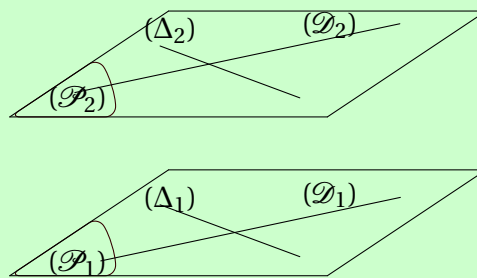
Définition 11 : droite parallèle à un plan

Une droite est dite parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.



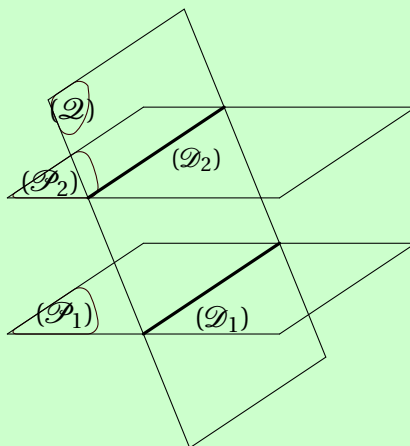
Propriété 27 : parallélisme de deux plans

Si deux droites sécantes d'un plan $(\mathcal{P}_1)$ sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan $(\mathcal{P}_2)$, alors les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles.



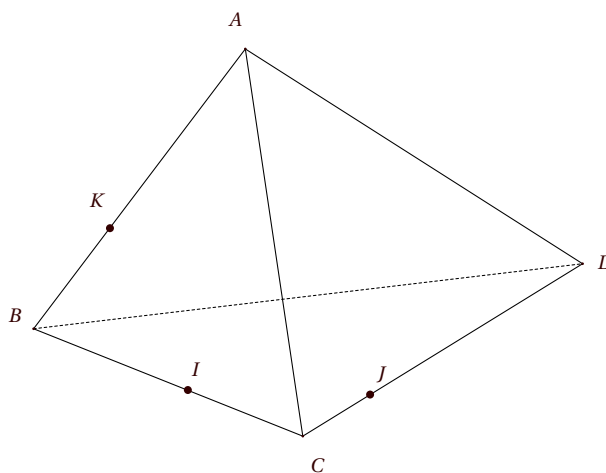
Propriété 28 : intersection de deux plans parallèles

Si deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles, les intersections de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ et d'un plan $(\mathcal{Q})$ sont deux droites parallèles.



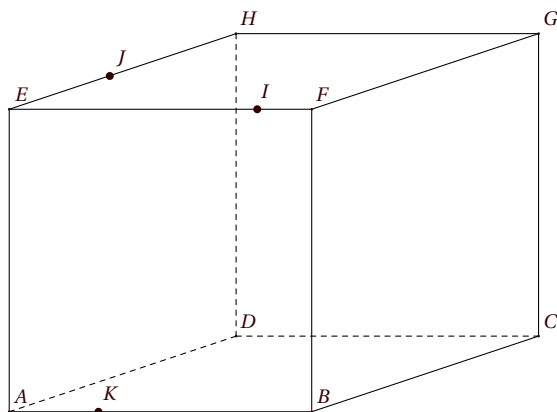
Exemple 14

1. Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $[AE]$ et $[BF]$ soient une arête.
Construire l'intersection des plans (AFC) et (BEG) .
2. Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $[AE]$ et $[BF]$ soient une arête.
Soit M un point quelconque de $[BF]$.
 - a. Construire en perspective cavalière le cube.
 - b. Construire le point d'intersection I de (EM) et (AB) .
 - c. Construire le point d'intersection J de (GM) et (BC) .
 - d. Construire et déterminer la droite d'intersection des plans (ABC) et (EGM) .
3. Soit $ABCD$ un tétraèdre.
Soit I un point quelconque de $[AB]$ et J un point quelconque de $[BC]$.
Construire et déterminer l'intersection des plans (CDI) et (ADJ) .
4. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK) .

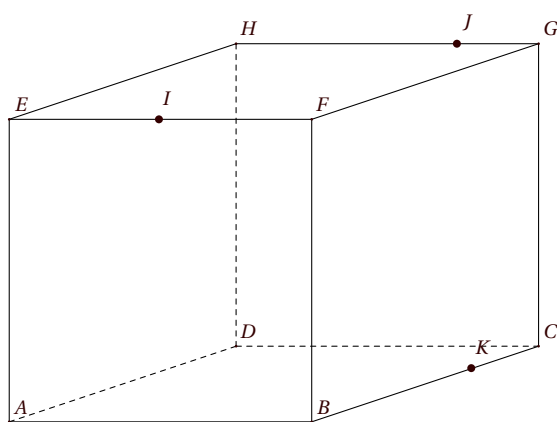


5. Dans chaque cas, tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) .

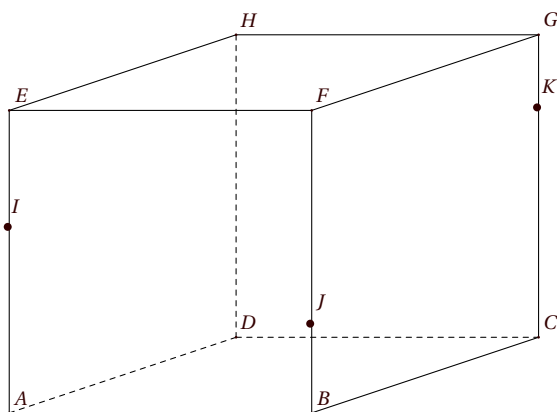
a. Cas 1



b. Cas 2



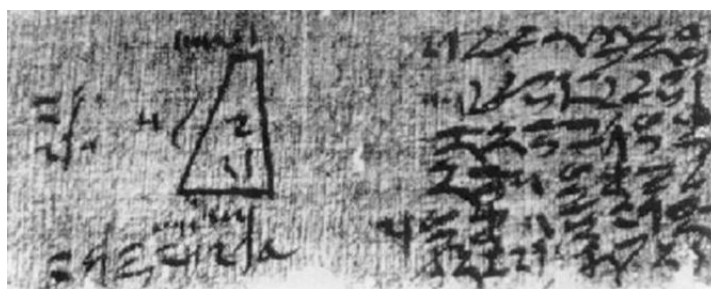
c. Cas 3



Un peu d'histoire

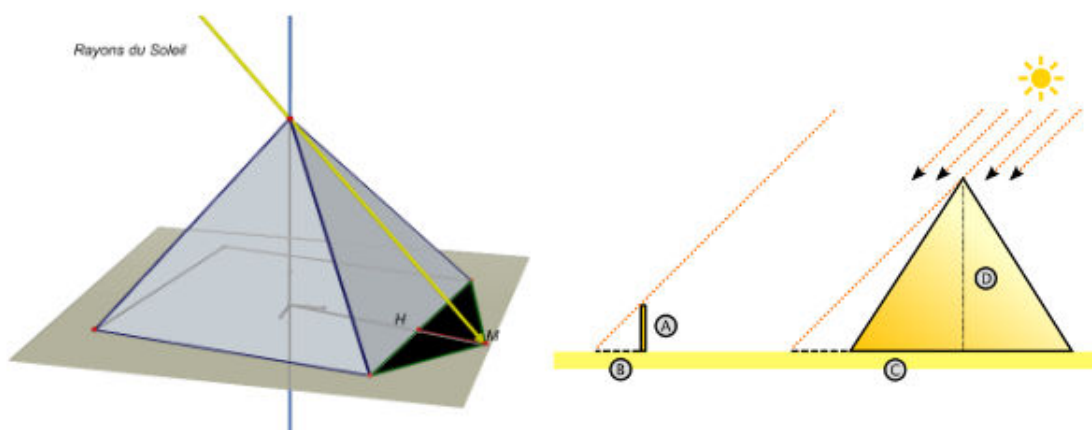
La géométrie, mot qui étymologiquement signifie « mesure de la terre » en grec, a été de tout temps une préoccupation des hommes. On retrouve des traces de pratiques géométriques dès les plus anciennes civilisations.

Par exemple les Babyloniens savaient calculer l'aire des carrés, des rectangles et des trapèzes, connaissaient une formule approchée pour calculer le volume d'un tronc de pyramide à base carrée. De même les Égyptiens ont décrit, dans le papyrus de Rhindt ou de Moscou, des algorithmes pour calculer la surface de champs ou le volume d'un tronc de cône.



Papyrus de Moscou (1850 avant JC)

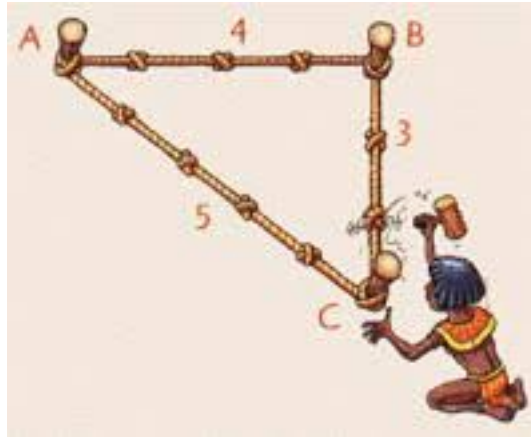
Thalès est un mathématicien grec qui vécut de 625 avant JC à 547 avant JC. Il calcule la hauteur des pyramides égyptiennes grâce à leur ombre portée : c'est une première utilisation du théorème qui porte son nom.



Ses travaux concernent la géométrie plane. On lui doit l'énoncé de plusieurs résultats :

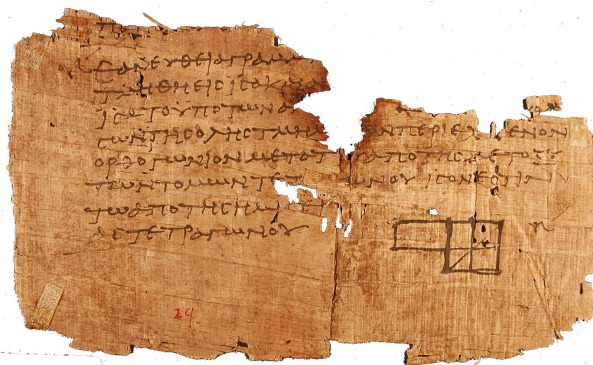
- les angles opposés par le sommet, formés par deux droites qui se coupent, sont égaux
- un triangle isocèle a deux angles de même mesure
- un triangle est déterminé si la base et les angles à la base sont donnés.
- un triangle, inscrit dans un cercle dont un des côtés est un diamètre, est rectangle.

Pythagore est un mathématicien et philosophe grec qui vécut de 569 avant JC à 500 avant JC. Sa philosophie considère que le monde peut s'expliquer par le nombre (entier). Évidemment il énonce le théorème qui porte son nom mais on ignore s'il en donna une démonstration. Ce qui est certain c'est que les Babyloniens et les Égyptiens l'utilisaient dans la pratique avec par exemple une corde à 13 nœuds. Mais le progrès apporté par Pythagore est l'énoncé du théorème qui a une portée universelle, c'est-à-dire qu'il concernait tous les triangles rectangles en tant qu'objets mathématiques.



Corde à 13 nœuds

Euclide est un mathématicien grec qui vécut à Alexandrie (Égypte) de 330 avant JC à 275 avant JC. On ne sait pratiquement rien de sa vie mais il a laissé un ouvrage fondamental pour les mathématiques : *Les Éléments*. Cet ouvrage est divisé en treize livres. Les livres 1 à 6, traitent de géométrie plane, les livres 7 à 9, de théorie des rapports, le livre 10, de la théorie de nombres irrationnels d'Eudoxe, et enfin les livres 11 à 13 de géométrie dans l'espace. Ces livres se terminent par l'étude des propriétés des cinq polyèdres réguliers et une démonstration de leur existence. *Les Éléments* sont remarquables par la clarté avec laquelle les théorèmes sont énoncés et démontrés et sont une compilation du savoir géométrique de l'époque. Ils restèrent le noyau de l'enseignement mathématique pendant près de 2000 ans. Il se peut qu'aucun des résultats contenus dans les *Éléments* ne soit d'Euclide, mais l'organisation de la matière et son exposé lui sont dus.

Un fragment des *Éléments* d'Euclide trouvé à Oxyrhynque (Égypte) sur un papyrus

On considère souvent *les Éléments* comme les premiers textes mathématiques dans le sens où toutes les propositions énoncées sont démontrées. Dans le premier livre, Euclide énonce des postulats (ou axiomes) considérés comme non démontrables et s'appuie sur ceux-ci pour démontrer tous les résultats classiques sur les triangles. Voici ses premiers postulats :

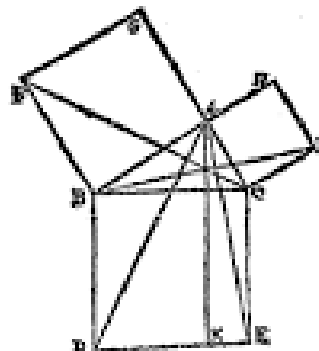
1. il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan ;
2. tout segment peut être étendu suivant sa direction en une droite (infinie) ;
3. à partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment ;
4. tous les angles droits sont égaux entre eux ;
5. étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.

THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui souffient l'angle droit, est egal aux quarte des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC , sur les costez duquel soient descriptz les trois quarrés $BCEd$, $ABFG$, $AHIC$. Je dis que le quarré $BCEd$ descript sur le costé BC , qui souffient l'angle droit BAC , est egal aux deux quarrés $ABFG$ & $AHIC$, descriptz sur les deux autres costez AB & AC .

Car soit menée la ligne AX parallele à BD , ou à CE , & tirees les lignes AD , AE , CF & BI . D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au point A sont droits, les lignes droictes AB , AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droictes: Item CA , AG par la 14. prop. Decechef, puis que les angles ABF , CBD sont euaux, car ils



Démonstration du théorème Pythagore dans le livre 1 des Éléments

Dans le premier livre, Euclide prouve ses 28 premières propositions à partir des quatre premiers axiomes, mais il est obligé d'invoquer le 5^e pour la 29^e proposition : une droite tombant sur deux parallèles fait les angles alternes égaux entre eux.

Ce cinquième postulat d'Euclide, aussi appelé postulat des parallèles, a longtemps posé beaucoup de problèmes aux mathématiciens, qui ont cherché à le déduire des quatre premiers. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que Gauss d'abord, puis indépendamment Janos Bolyai et Nicolai Lobachevsky en 1823 se rendirent compte qu'on pouvait très bien considérer des modèles non-contradictaires de la géométrie dans lequel on ne faisait pas cette 5^e hypothèse. C'est la naissance des géométries non-euclidiennes.