Propriété 1

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$x^2 + \cancel{2}\times x \times \frac{b}{\cancel{2}a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

forme canonique de ax^2+bx+c

Exemple 1

1) $f_1(x) = x^2+4x+7$

$$= (x+2)^2-4+7$$

$$= (x+2)^2+3$$

$$x^2+8x = (x+4)^2-16$$

$$x^2+3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

$$x^2-5x = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

3] $f_3(x) = 2x^2 + 6x + 10$

$$= 2(x^2 + 3x + 5)$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5\right]$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right]$$

$$= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$$

5] $f_5(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{48}$$

7] $f_7(x) = -\left(x^2 + 4x - 1\right)$

$$= -\left[(x+2)^2 - 4 - 1\right]$$

$$= -\left[(x+2)^2 - 5\right]$$

$$= -(x+2)^2 + 5$$

Propriété 3

Avec la forme canonique, on a :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

1er cas Si $\Delta > 0$ alors

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x)=0 \iff x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ ou } x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$\iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2e cas $\Delta = 0$.

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$f(x)=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x+\frac{b}{2a}=0$$

$$\iff x=-\frac{b}{2a}$$

3e cas $\Delta < 0$ $\quad f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$$f(x)=0 \iff \underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{positif}} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}$$

$f(x)=0$ n'a pas de solution.

Exemple 2

1) Soit (E_1) : $4x^2 - 9x + 2 = 0$

Soit Δ le discriminant de $4x^2 - 9x + 2$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$$

(E_1) a exactement deux solutions : $x_1 = \frac{9+7}{8} = 2$

$$x_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \left\{ \frac{1}{4} ; 2 \right\}.$$