ax^2+bx+c. a :

Si $\Delta > 0$ deux racines : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ 1 seule racine $x_1 = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ aucune racine.

Vocabulaire

racine d'un polynôme, donc de ax^2+bx+c

solution d'une équation, donc de $ax^2+bx+c=0$

Exemple 2

3) Soit (E_3) l'équation : $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$

Soit Δ le discriminant de $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$

$\Delta = 1^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-1=0$

$(E_3) \iff x = \frac{-1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$\iff x = \frac{-1}{-1}$

$\iff x = 1.$

L'ensemble des solutions de (E_3) est : $S = \{1\}$.

5) Soit (E_5) : $7x^2-5x+2=0$.

Le discriminant de (E_5) est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 7\times 2$

$= 25-56$

$= -31 < 0$

L'ensemble des solutions de (E_5) est : $S = \emptyset$

Exemple 3

1/ Soit (E_1) l'équation : $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = 2$

Soit D_f l'ensemble de definition de (E_1).

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2;-4\}$

$$(E_1) \iff \frac{(2x+5)(x+4) - (3x-6)(x-2)}{(x-2)(x+4)} = 2$$

$$\iff \frac{(2x^2+8x+5x+20) - (3x^2-6x-6x+12)}{x^2+4x-2x-8} = 2$$

$$\iff \frac{2x^2+13x+20-3x^2+12x-12}{x^2+2x-8} = 2$$

$$\iff \frac{-x^2+25x+8}{x^2+2x-8} = \frac{2}{1}$$

$$\iff -x^2+25x+8 = 2(x^2+2x-8)$$

$$\iff -3x^2+21x+24 = 0$$

$$\iff 3x^2-21x-24 = 0$$

$$\iff x^2-7x-8 = 0$$

Le discriminant de x^2-7x-8 est $\Delta = 49+32 = 81 = 9^2$

donc $(E_1) \iff x = \frac{7+9}{2}$ ou $x = \frac{7-9}{2}$

$$\iff x = 8 \text{ ou } x = -1$$

Or 8 et -1 appartiennent à D_f. L'ensemble des solutions de (E_1) est $S = \{8;-1\}$.

Exemple 2

7] Soit (E_7) l'équation : $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

Le discriminant de (E_7) est : $\Delta=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-4\times1\times\sqrt{6}$

$$=2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3-4\sqrt{6}$$
$$=2+2\sqrt{6}+3-4\sqrt{6}$$
$$=2-2\sqrt{6}+3$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

attention

$\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}\neq\sqrt{2}-\sqrt{3}$

donc $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Donc $(E_7)\iff x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

$\iff x=\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{2}$.

L'équation (E_7) a exactement deux solutions : $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$.

9] Soit (E_9) l'équation : $x^4+2x^2-3=0$.

On pose $X=x^2$. Donc $X^2=(x^2)^2=x^4$

$(E_9)\iff X^2+2X-3=0$

Le discriminant de X^2+2X-3 est $\Delta=4-4\times1\times(-3)$
$=16=4^2$

$(E_9)\iff X=\dfrac{-2+4}{2}$ ou $X=\dfrac{-2-4}{2}$

$\iff X=1$ ou $X=-3$

$\iff x^2=1$ ou $\underbrace{x^2=-3}_{\text{n'a pas de solution car } x^2\geq 0}$

$\iff x=1$ ou $x=-1$.

L'ensemble des solutions de (E_9) est $S=\{1;-1\}$

Exemple 3

3) Soit (E_3) : $\dfrac{18x^2+11x-25}{16x^2+62x+55} = -2$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_3).

$x \in D_f \iff 16x^2+62x+55 \neq 0$

Le discriminant de $16x^2+62x+55$ est $\Delta = 62^2 - 4\times16\times55$

$$= 3844 - 64\times55$$
$$= 3844 - 3520$$
$$= 324$$
$$= 18^2$$

64
55
320
320
3520

donc $x \in D_f \iff x \neq \dfrac{-62-18}{32}$ et $x \neq \dfrac{-62+18}{32}$

$\iff x \neq \dfrac{-80}{32}$ et $x \neq -\dfrac{44}{32}$

$\iff x \neq -\dfrac{5}{2}$ et $x \neq -\dfrac{11}{8}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2} ; -\dfrac{11}{8}\right\}$

$(E_3) \iff 18x^2+11x-25 = -2(16x^2+62x+55)$

$\iff 50x^2+135x+85 = 0$

$\iff 10x^2+27x+17 = 0$

Le discriminant de $10x^2+27x+17$ est $\Delta = 27^2 - 4\times10\times17$

$$= 729 - 680$$
$$= 49 = 7^2$$

$(E_3) \iff x = \dfrac{-27+7}{20}$ ou $x = \dfrac{-27-7}{20}$

$\iff x = -1$ ou $x = -\dfrac{17}{10}$

Or -1 et $-\dfrac{17}{10}$ appartiennent à D_f, l'ensemble des solutions de (E_3) est : $S = \left\{-1 ; -\dfrac{17}{10}\right\}$.

Exemple 4

1) $(S_1) \iff \begin{cases} y = \frac{43}{3} - x \\ x\left(\frac{43}{3} - x\right) = 24 \end{cases}$

Soit (E) l'équation : $x\left(\frac{43}{3} - x\right) = 24$

$(E) \iff \frac{43}{3}x - x^2 - 24 = 0$

$\iff 3x^2 - 43x + 72 = 0$

le discriminant de $3x^2 - 43x + 72$ est $\Delta = 1849 - 4 \times 3 \times 72$

$= 1849 - 864$

$= 985$

$\iff x = \frac{43 + \sqrt{985}}{6}$ ou $x = \frac{43 - \sqrt{985}}{6}$

donc $(S_1) \iff \begin{cases} y = \frac{43}{3} - x \\ x = \frac{43 + \sqrt{985}}{6} \text{ ou } x = \frac{43 - \sqrt{985}}{6} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{43 + \sqrt{985}}{6} \text{ et } y = \frac{43 - \sqrt{985}}{6} \\ x = \frac{43 - \sqrt{985}}{6} \text{ et } y = \frac{43 + \sqrt{985}}{6} \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (S_1) est :

$$S = \left\{ \left(\frac{43 + \sqrt{985}}{6} ; \frac{43 - \sqrt{985}}{6}\right) ; \left(\frac{43 - \sqrt{985}}{6} ; \frac{43 + \sqrt{985}}{6}\right) \right\}$$