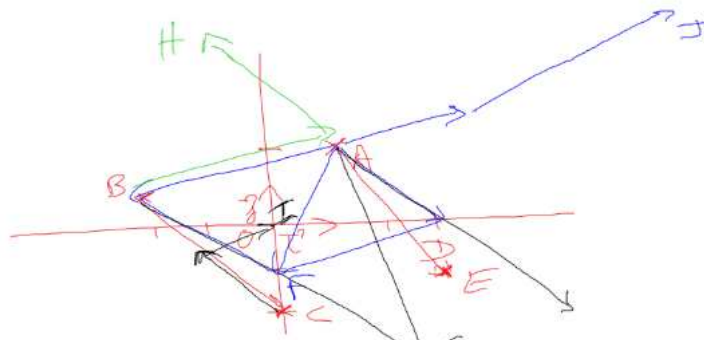


Exemple 8

1) a)



$$b) \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} x_A - x_D \\ y_A - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad M(x, y) \longleftrightarrow OM(x, y)$$

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E a pour coordonnées (3; -1)

$$\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AD}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

F a pour coordonnées (0; -1).

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OA} + 2\vec{AD} + \vec{AB}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

G a pour coordonnées (2; -3).

$$\vec{OH} = \vec{OB} + \vec{BH} = \vec{OB} + \vec{BA} - \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{DA}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

H a pour coordonnées (-1; 4)

$$\begin{aligned}
 \vec{OI} &= \vec{OC} + \vec{CI} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{CD} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1+2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0+2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-12+9+4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

I a pour coordonnées  $(0; \frac{1}{6})$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{OJ} &= \vec{OA} + \vec{AJ} = \vec{OA} - \vec{JA} = \vec{OA} - \left( \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{CD} \right) \\
 &= \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{CD} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{BA} + 2\vec{CD} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0+2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

J a pour coordonnées  $(\frac{17}{2}; \frac{13}{2})$ .

e) I milieu de  $[AB]$ :  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$   
 $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

M est le milieu de  $[AB]$ , donc  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{1}{2}$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3}{2}$   
M a pour coordonnées  $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ .

N est le milieu de  $[BC]$ :  $x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1}{2}$$

N a pour coordonnées:  $(-1; -\frac{1}{2})$ .

P est le milieu de  $[CD]$ :  $x_P = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{3}{2}$

$$y_P = \frac{y_D + y_C}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

P a pour coordonnées:  $(\frac{3}{2}; -1)$ .

Q est le milieu de  $[AD]$ :  $x_Q = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$y_Q = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Q a pour coordonnées:  $(2; 1)$ .

f)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$$\vec{MN} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

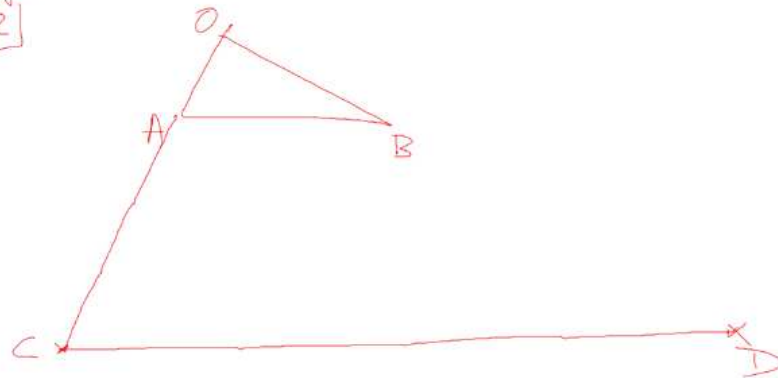
$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc  $\vec{MN} = \vec{QP}$

Ainsi MNPQ est un parallélogramme.

Exemple 10

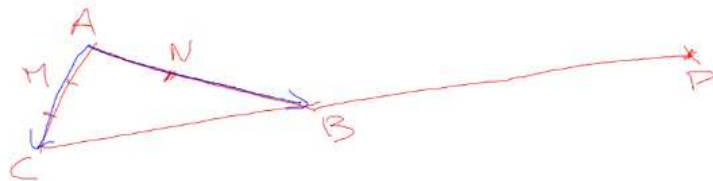
2]



$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OC} + \vec{CD} = 4\vec{OA} + 4\vec{AB} \\ &= 4(\vec{OA} + \vec{AB}) = 4\vec{OB}\end{aligned}$$

Les vecteurs  $\vec{OD}$  et  $\vec{OB}$  sont colinéaires.  
Les points O, B et D sont alignés.

3]



Méthode

- on choisit une base de vecteurs
- on exprime  $\vec{MN}$  et  $\vec{MP}$  dans cette base
- on vérifie que  $\vec{MN}$  et  $\vec{MP}$  sont colinéaires

On choisit la base  $(\vec{AB}, \vec{AC})$

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{7}\vec{AB}$$

$$\begin{aligned}\vec{MP} &= \vec{MB} + \vec{BP} = \vec{MA} + \vec{AB} + 2\vec{CB} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{AB} + 2(\vec{CA} + \vec{AB})\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{AB} - 2\vec{AC} + 2\vec{AB}$$

$$\boxed{\vec{MP} = -\frac{7}{3}\vec{AC} + 3\vec{AB}}$$

$$\text{or } 7\vec{MN} = 7\left(-\frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{7}\vec{AB}\right) = -\frac{7}{3}\vec{AC} + 3\vec{AB} = \vec{MP}$$

les vecteurs  $\vec{MN}$  et  $\vec{MP}$  sont colinéaires.

les points M, N et P sont alignés.

$$\text{or } \frac{7}{16}\vec{DF} = \frac{7}{16}\left(\frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{8}{21}\vec{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{16}{2 \times 3}}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC} = \vec{DG}.$$

les vecteurs  $\vec{DF}$  et  $\vec{DG}$  sont colinéaires.

les points D, F et G sont alignés.