Exemple 4 bis

1] Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S_1) :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 29 \\ 2x + 7y = -22 \end{cases}$$

2] En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système (S_2) : $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 29 \\ 2x^2 + 7y^2 = -22 \end{cases}$

3] En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système (S_3) : $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 29 \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = -22 . \end{cases}$

1] $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x;y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$(S_1) \iff \begin{cases} 6x - 10y = 58 & \leftarrow 2L_1 \\ 6x + 21y = -66 & \leftarrow 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -31y = 124 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2x + 7y = -22 & \leftarrow L_2/3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -4 \\ 2x = -22 - 7\times(-4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -4 \\ 2x = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est : $S = \{(3;-4)\}$

$\{3;-4\}$ est un ensemble qui a 2 éléments (les 2 nombres 3 et -4)

$\{(3;-4)\}$ est un ensemble qui a un seul élément (le couple $(3;-4)$)

2) On pose $X = x^2$ et $Y = y^2$

$$(S_2) \iff \begin{cases} 3X - 5Y = 29 \\ 2X + 7Y = -22 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 3 \\ Y = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = -4 \end{cases}$$

← cette équation n'a pas de solution

L'ensemble des solutions de (S_2) est : $S = \emptyset$

Si jamais, on avant $\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 4 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ et } y = 2 \\ \text{ou } x = \sqrt{3} \text{ et } y = -2 \\ \text{ou } x = -\sqrt{3} \text{ et } y = 2 \\ \text{ou } x = -\sqrt{3} \text{ et } y = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutiono du système (S_2) est :

$$S = \left\{ (\sqrt{3};2) ; (\sqrt{3};-2) ; (-\sqrt{3};2) ; (-\sqrt{3};2) \right\}$$

3) L'ensemble de définition de (S_3) est :

$$D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^*)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad D_f = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}^*$$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$

$$(S_3) \iff \begin{cases} 3X - 5Y = 29 \\ 2X + 7Y = -22 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 3 \\ Y = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{x} = 3 \\ \frac{1}{y} = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Or le couple $\left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{4}\right)$ appartient à D_f.

L'ensemble des solutions de (S_3) est : $S = \left\{\left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{4}\right)\right\}$.

Exemple 5

1) Choix des inconnues

Soient x et y les deux nombres cherchés.

Mise en équation

Les deux nombres sont consécutifs, donc $y = x+1$.

Le produit est égal à 4970, donc $xy = 4970$

On aboutit au système (S) : $\begin{cases} y = x+1 \\ xy = 4970 \end{cases}$

Résolution

L'ensemble de définition de (S) est : $D_f = \mathbb{Z}^2$

$$(S) \iff \begin{cases} y = x+1 \\ x(x+1) = 4970 \end{cases}$$

Soit (E) l'équation : $x(x+1) = 4970$

$$(E) \iff x^2 + x - 4970 = 0$$

Le discriminant de $x^2+x-4970$ est $\Delta = 1 + 4 \times 4970$
$= 19881 = 141^2$

$$(E) \iff x = \frac{-1+141}{2} \text{ ou } x = \frac{-1-141}{2}$$

$$\iff x = 70 \text{ ou } x = -71$$

Ainsi (S) $\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x = 70 \text{ ou } x = -71 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 70 \text{ et } y = 71 \\ \text{ou} \\ x = -71 \text{ et } y = -70 \end{cases}$

Or $(70;71)$ et $(-71;-70)$ appartiennent à D_f

l'ensemble des solutions de (S) est :

$$S = \{(70;71);(-71;-70)\}.$$

Conclusion

Les deux nombres cherchés sont soit 70 et 71, soit −71 et −70.

Exemple 4

4) $(S_4) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ x(4-x) = 5 \end{cases}$

Soit (E) l'équation : $x(4-x) = 5$

$(E) \Longleftrightarrow \quad -x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x + 5 = 0$

Le discriminant de $x^2 - 4x + 5$ est $\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4$

(E) n'a pas de solution

Ainsi l'ensemble des solutions de (S) est : $S = \emptyset$

Exemple 5

3) Choix des inconnues

Soient x et y les mesures en m des deux côtés de l'angle droit.

Mise en équation

L'aire du triangle est égale à $\frac{x \times y}{2}$.

Donc $\frac{xy}{2} = 429$

L'hypoténuse est égale à $\sqrt{x^2+y^2}$

Donc $\sqrt{x^2+y^2} = 72,5$

On aboutit au système (S) : $\begin{cases} \frac{xy}{2} = 429 \\ \sqrt{x^2+y^2} = 72,5 \end{cases}$

Résolution L'ensemble de définition de (S) est $D_f = (\mathbb{R}^*)^2$

$$(S) \iff \begin{cases} xy = 858 \\ x^2+y^2 = 5256,25 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{858}{x} \\ x^2 + \left(\frac{858}{x}\right)^2 = 5256,25 \end{cases}$$

soit (E) l'équation : $x^2 + \left(\frac{858}{x}\right)^2 = 5256,25$

$$(E) \iff x^4 - 5256,25\,x^2 + 858^2 = 0$$

On pose $X = x^2$

$$(E) \iff X^2 - 5256,25X + 736164 = 0$$

le discriminant de $X^2 - 5256,25X + 736164$ est :

$$\Delta = 5256,25^2 - 4 \times 736164 = 4968,25^2$$

$$(E) \iff X = \frac{5256,25 + 4968,25}{2} \text{ ou } X = \frac{5256,25 - 4968,25}{2}$$

$$\iff X = 5112,25 \text{ ou } X = 144$$

$$\iff x^2 = 5112,25 \text{ ou } x^2 = 144$$

$\Longleftrightarrow \quad x = 71{,}5$ ou $x = -71{,}5$ ou $x = 12$ ou $x = -12$

Or x appartient à $\mathbb{R}^+$.

donc $(E) \Longleftrightarrow x = 71{,}5$ ou $x = 12$

Ainsi $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{858}{x} \\ x = 71{,}5 \text{ ou } x = 12 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 71{,}5 \text{ et } y = 12 \\ \text{ou} \\ x = 12 \text{ et } y = 71{,}5 \end{cases}$

Les couples $(12 ; 71{,}5)$ et $(71{,}5 ; 12)$ appartiennent à D_f,

l'ensemble des solutions de (S) est : $S = \{(12;71{,}5) ; (71{,}5 ; 12)\}$

Conclusion

Les dimensions du triangle sont : 12 m, 71,5 m et 72,5 m.

Le périmètre est égal à 156 m.

Exemple 6

11) $P_{11}(2) = 2^3 - 2^2 - 74 \times 2 + 144$
$= 8 - 4 - 148 + 144 = 0.$

2 est une racine de $P_{11}(x)$. Ainsi $P_{11}(x)$ est factorisable par $x-2$. On pose la division euclidienne de $P_{11}(x)$ par $x-2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 74x + 144 & x-2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} & \overline{x^2 + x - 72} \\ x^2 - 74x & \\ \underline{-x^2 + 2x} & \\ -72x + 144 & \\ \underline{72x - 144} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P_{11}(x) = (x-2)(x^2+x-72)$.

Le discriminant de x^2+x-72 est $\Delta = 1 + 4 \times 72 = 289 = 17^2$

x^2+x-72 a deux racines : $x_1 = \frac{-1-17}{2} = -9$

$x_2 = \frac{-1+17}{2} = 8.$

Donc $x^2+x-72 = (x+9)(x-8)$.

Ainsi $P_{11}(x) = (x-2)(x+9)(x-8)$.