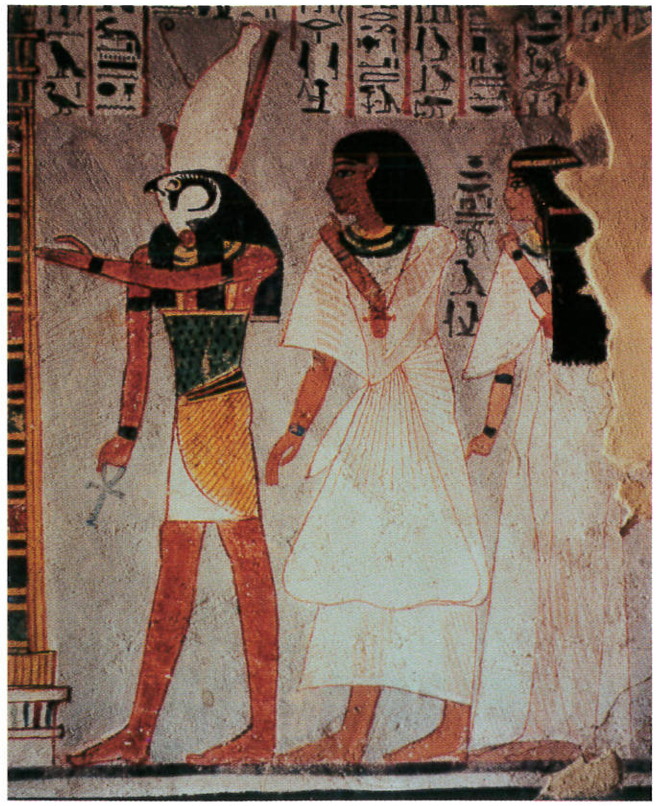
Le mystère de l'œil d'Horus et les mathématiques égyptiennes

Nous avons vu récemment comment les Mésopotamiens avaient créé leur système mathématique. Mais ils n'étaient pas les seuls à s'intéresser aux nombres et au calcul : la civilisation égyptienne était tout aussi inventive dans ce domaine. Elle faisait même intervenir ses dieux pour expliquer certaines méthodes de calcul ! Bien que l'on ait retrouvé moins de documents mathématiques en Égypte qu'en Mésopotamie, les pyramides, temples et autres constructions monumentales sont là pour nous rappeler que les Égyptiens étaient de grands mathématiciens.

Le dieu Horus, à gauche, représenté sur une fresque d'une tombe.
© AKG



Qu'est ce qu'une base ?

Elle peut être définie comme le nombre à partir duquel on multiplie une unité pour passer d'un ordre (unités, dizaines, centaines...) au suivant.

Les maths mésopotamiennes

Cette civilisation avait inventé une méthode de comptage et de calcul où :
- il n'existe que 2 chiffres différents : le premier sert pour 1 ; 60 et tous les multiples de 60 ; l'autre sert pour 10.
- le "nombre de référence" est 60.

Plus précisément, ils comptaient en base 60.
- c'est la position des chiffres dans le nombre qui permet de définir la valeur de ces chiffres. On additionne ensuite ces valeurs pour obtenir la valeur du nombre. C'est le principe de position.

Pour plus de précisions, voir le Cosinus n°32, "Les premières mathématiques de l'histoire".

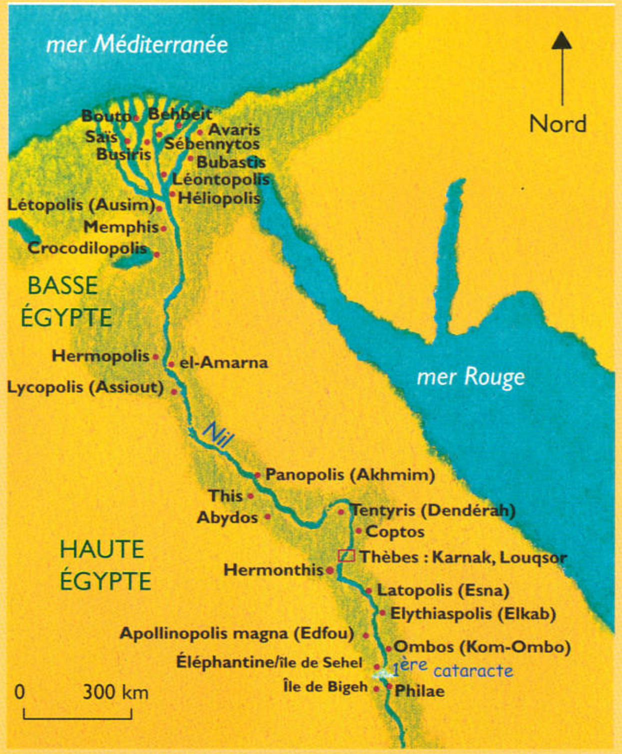
Peu de documents ayant été conservés en bon état au cours du temps, on explique moins bien l'évolution du calcul chez les Égyptiens que chez les Mésopotamiens. En effet le **papyrus**, sorte d'ancêtre du papier, résiste assez mal aux outrages du temps... Heureusement, quelques célèbres exemples (le papyrus de Rhind, celui de Moscou et le rouleau de cuir des mathématiques égyptiennes), vont nous permettre de décrypter certaines de leurs découvertes, que nous comparerons à celles des Mésopotamiens.

Les savants égyptiens ont choisi le système de numération à base 10, c'est-à-dire celui que nous utilisons aujourd'hui pour nos calculs.

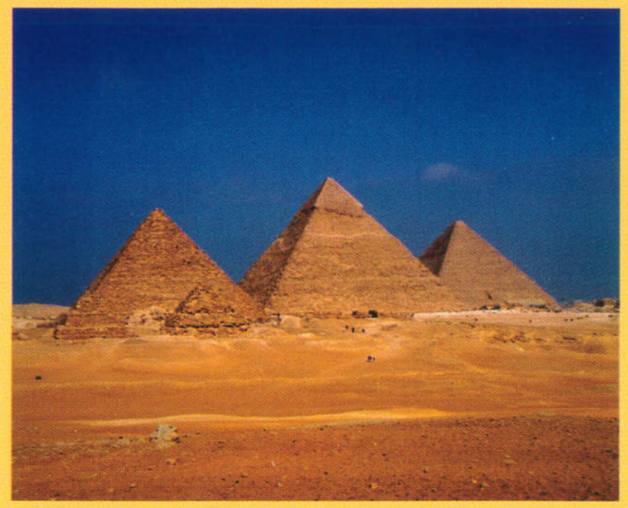
Ce système "à base 10" utilise les multiples de 10 : pour passer des unités aux dizaines, et des dizaines aux centaines, nous multiplions à chaque fois par 10.

La civilisation Égyptienne

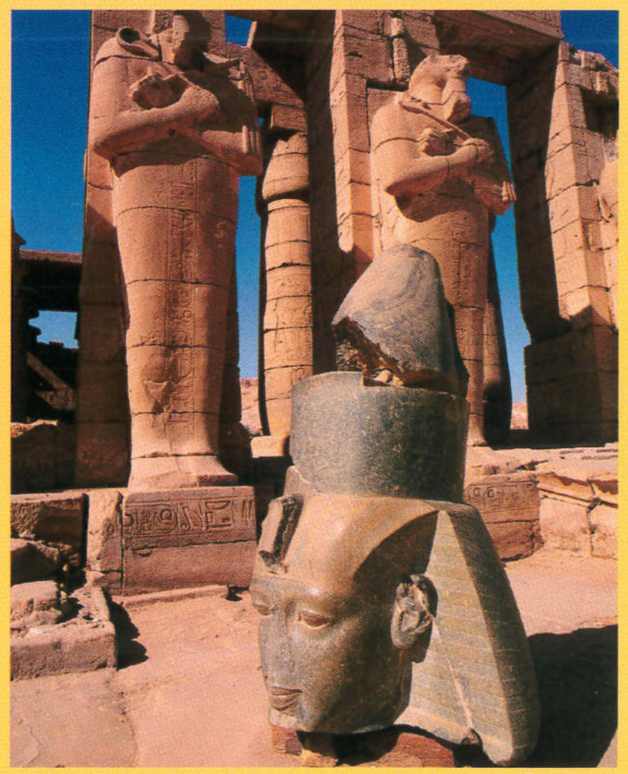
Au nord-est de l'Afrique, sous la Méditerranée, coule le fleuve Nil qui a nourri et abrité les hommes depuis la préhistoire. Le climat et les richesses de la vallée du Nil ont permis à une civilisation d'évoluer et de prospérer pendant des millénaires, au point de devenir l'un des peuples les plus puissants et raffinés de l'Antiquité.
On retrouve les premières traces d'économie villageoise dès 5000 av. J.-C. ; et l'unification du pays sous la main d'un roi est réalisée vers 3000 av. J.-C. L'écriture hiéroglyphique, le culte des dieux et l'organisation politique et religieuse se mettent en place très tôt. De nombreuses pyramides sont construites entre 2700 et 2200 av. J.-C., dont les plus célèbres sont Kheops, Khephren et Mykérinos, sur le plateau de Gizeh.
Pendant des siècles encore, les grands pharaons se succèdent : Aménophis, Hatshepsout, Thoutmosis, Toutankhamon, Ramsès... La civilisation se développe, les connaissances s'accumulent et le mode de vie devient de plus en plus raffiné. Dans les domaines du confort, de l'hygiène, de l'esthétique, de la mode et de l'art les Égyptiens sont étonnants, et certaines de leurs idées et inventions sont parvenues jusqu'à nous malgré la distance et le fossé des cultures.
La fin de l'Égypte antique se fait sentir au premier millénaire av. J.-C. : le pays subit des invasions, des rois étrangers sont portés au pouvoir, et l'on ressent une certaine décadence qui facilite la colonisation du pays par les Grecs puis les Romains. C'en est fini de l'Égypte des pharaons. Mais leurs gigantesques constructions ont su résister au temps et sont parvenues jusqu'à notre époque, pour témoigner de leur vie et de leur habileté.



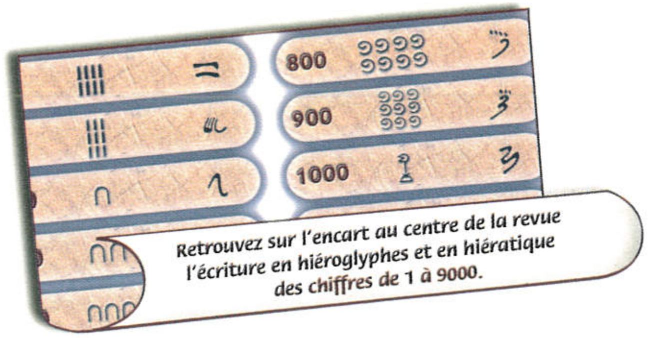
Carte du royaume d'Égypte au temps des pharaons. Les villes importantes, contenant des sanctuaires sacrés, y sont mentionnées.
© Arkeojunior



Les célèbres pyramides de Gizeh © AKG



Le Ramesseum, temple de Ramsès II, à Thèbes. © AKG



Écrire les nombres en hiéroglyphes

L'écriture égyptienne la plus connue aujourd'hui, c'est l'ensemble des **hiéroglyphes** (du grec *hiéros* : sacré, et *gluphein* : graver). Ces hiéroglyphes sont de petits dessins stylisés, qui représentent une silhouette d'animal, une bouche, une main, un objet… Qu'ils soient gravés sur la pierre ou dessinés au pinceau sur un papyrus ou une fresque, c'est un exercice long et fastidieux, qui ne convient pas pour le travail quotidien.

Les hiéroglyphes sont une écriture magnifique mais très longue à exécuter. Elle était donc réservée aux textes importants. © Forman/AKG

Un texte en hiératique. © Forman/AKG

Ces hiéroglyphes, sous le pinceau des scribes, ont rapidement été simplifiés, stylisés, pour devenir une écriture dite **hiératique** bien plus facile à écrire, pour les textes courants. On pourrait la comparer à notre écriture "cursive" (à la main). Elle emploie des symboles conventionnels qui simplifient les hiéroglyphes.

Contrairement au système de position mésopotamien, les prêtres égyptiens ont adopté un **système additif**. Celui-ci présente **des symboles différents** pour désigner 1 ; 10 ; 100 ; 1 000 ; 10 000 ; 100 000…

• On peut répéter un symbole autant de fois que nécessaire

• pour lire un nombre, on additionne les valeurs de l'ensemble des symboles intervenant dans l'écriture du nombre

• l'ordre de lecture n'est pas nécessaire, la représentation des chiffres peut être horizontale, verticale, de droite à gauche ou de gauche à droite.
Voici comment écrire les nombres suivants en hiéroglyphes.

1 = 𓏺 10 = 𓎆 100 = 𓍢

298 = 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺

298 peut s'écrire aussi : 𓍢𓍢 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆

ou : 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺
𓏺𓏺𓏺𓏺 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆

car l'écriture égyptienne ne prend pas en compte la position des chiffres, seulement leur somme.

> **Exercice 1 :**
> **Exercez-vous à écrire quelques nombres en hiéroglyphes, puis en hiératique : 3, 17, 78, 659, 3482. Que pensez-vous du hiératique ? Est-il vraiment plus pratique ?**

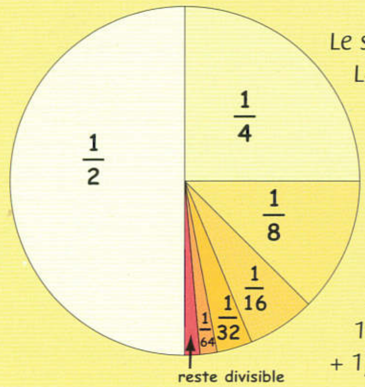
Les Égyptiens, champions des fractions

Selon l'historien grec Hérodote, les Égyptiens étaient les champions de la mesure. En effet, à chaque crue du Nil, la montée des eaux effaçait les limites établies par les géomètres du pharaon entre les champs. Une fois la décrue amorcée, ces géomètres y rétablissaient de nouvelles mesures, car l'impôt réclamé par le pharaon dépendait de la mesure en unité d'aire de la surface cultivée. Or, il était pratiquement impossible qu'un arpentage tombe juste, c'est-à-dire qu'il puisse être exprimé par un nombre entier. D'où l'utilité des fractions chez les Égyptiens. Cette importance des fractions se retrouve dans leur mythologie à la fin du 1[er] millénaire.

Les dieux faisaient des maths !

Selon les prêtres égyptiens, Osiris, dieu des morts, épousa sa sœur Isis. Son frère Seth, dieu de la violence, le tua par jalousie. Devenu grand, Horus le dieu faucon, fils d'Osiris et d'Isis, décida de venger sa mère en provoquant un duel avec son oncle Seth. Horus gagna le duel, malheureusement, son oncle lui arracha un œil qu'il découpa en 6 morceaux. Chargé par le tribunal divin de reconstituer l'œil d'Horus, Thot, le dieu comptable, attribua une valeur à chacun des morceaux.

L'œil d'Horus fut éclaté en 6 morceaux par Seth. © Forman/AKG

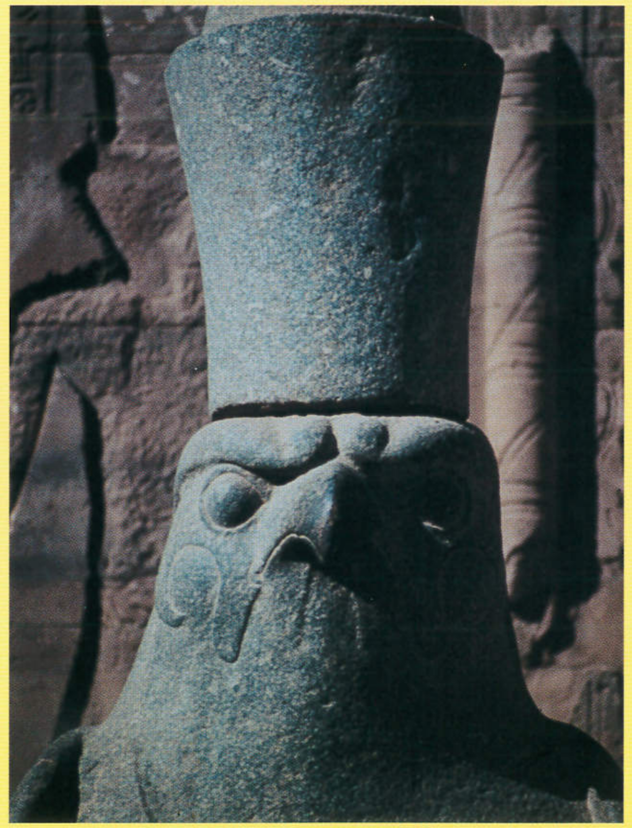


Le sourcil valait 1/8
Les deux morceaux de la cornée 1/2 et 1/16
L'iris : 1/4
Les deux marques du faucon 1/64 et 1/32

Soit au total 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 63/64

D'après ces calculs, il manquait 1/64 de l'œil d'Horus. Heureusement ce reste fut fourni aux prêtres comptables par Thot. C'est depuis ce moment que les prêtres comptables se sont placés sous la protection de ce dernier.
La réponse de Thot illustre bien le fait qu'en poursuivant notre démarche (1/2 ; 1/4 ; 1/8 ; 1/16 ; 1/32…) nous n'arriverons jamais à un quotient bien déterminé. Il y aura toujours un petit reste de fraction. Thot permet donc aux prêtres d'utiliser l'approximation comme une méthode admissible, mais qui est connue des seuls dieux de la mythologie.
Pour les Égyptiens, seuls les dieux sont capables d'élucider les mystères de l'infiniment petit !

Thot, le dieu comptable, chargé du temps, du calendrier et de la lune. Il est représenté avec une tête d'ibis. © Forman/AKG



Le dieu Horus : quel air féroce ! Normal, après sa victoire sur Seth, il est devenu un dieu très puissant. © O'Dea/AKG

Pourtant, si les Égyptiens sont champions dans l'art de manipuler des fractions, **ils n'utilisent que les fractions ayant pour numérateur le chiffre 1**. Pour cette raison, ces fractions sont dites **unitaires**. Pour simplifier les choses, nous pouvons dire que l'arithmétique égyptienne s'organise autour de 3 règles.

1) La possibilité de multiplier et de diviser par 2 un nombre entier, ce qui permet par la suite d'effectuer n'importe quelle multiplication par addition.

2) La capacité de trouver les 2/3 de n'importe quelle fraction par la formule :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

Si en particulier le dénominateur est pair, cette écriture devient :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+n/2)}$$

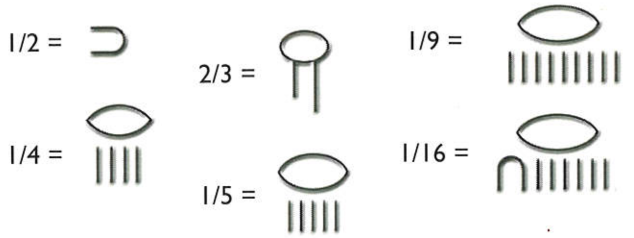
3) Ne sachant utiliser que des fractions unitaires, les Égyptiens sont conduits à décomposer les fractions de la forme 2/n en sommes de fractions unitaires.

C'est là qu'intervient **le papyrus Rhind**, sur lequel sont inscrits 85 problèmes, écrits par le scribe Ahmès, vers 1650 av. J.-C. Ahmès nous montre comment il procède pour décomposer des fractions de la forme **2/n** en sommes de fractions unitaires. Ces exemples s'étendent de **n = 5** à **n = 101**.
Par exemple, pour décomposer 2/13 en somme de fractions unitaires, il procède ainsi :

2/13 = 1/13 + 1/13
= (1/26 + 1/26) + 1/13
= (1/52 + 1/52) + 1/26 + 1/13
= (1/104 + 1/104) + 1/52 + 1/26 + 1/13
= 1/104 + 1/52 + (1/104 + 1/26 + 1/13)
2/13 = 1/104 + 1/52 + 1/8

Lorsque les calculs s'avèrent fastidieux, le prêtre utilise la réduction par la fraction 1/3. Ainsi 2/5 = 1/3 + 1/15

Comment s'écrivaient ces fractions, en écriture hiéroglyphique ? C'est grâce à la récente traduction du papyrus Rhind que nous le savons. En voici quelques exemples :



À part 1/2 et 2/3, la méthode est extrêmement simple !

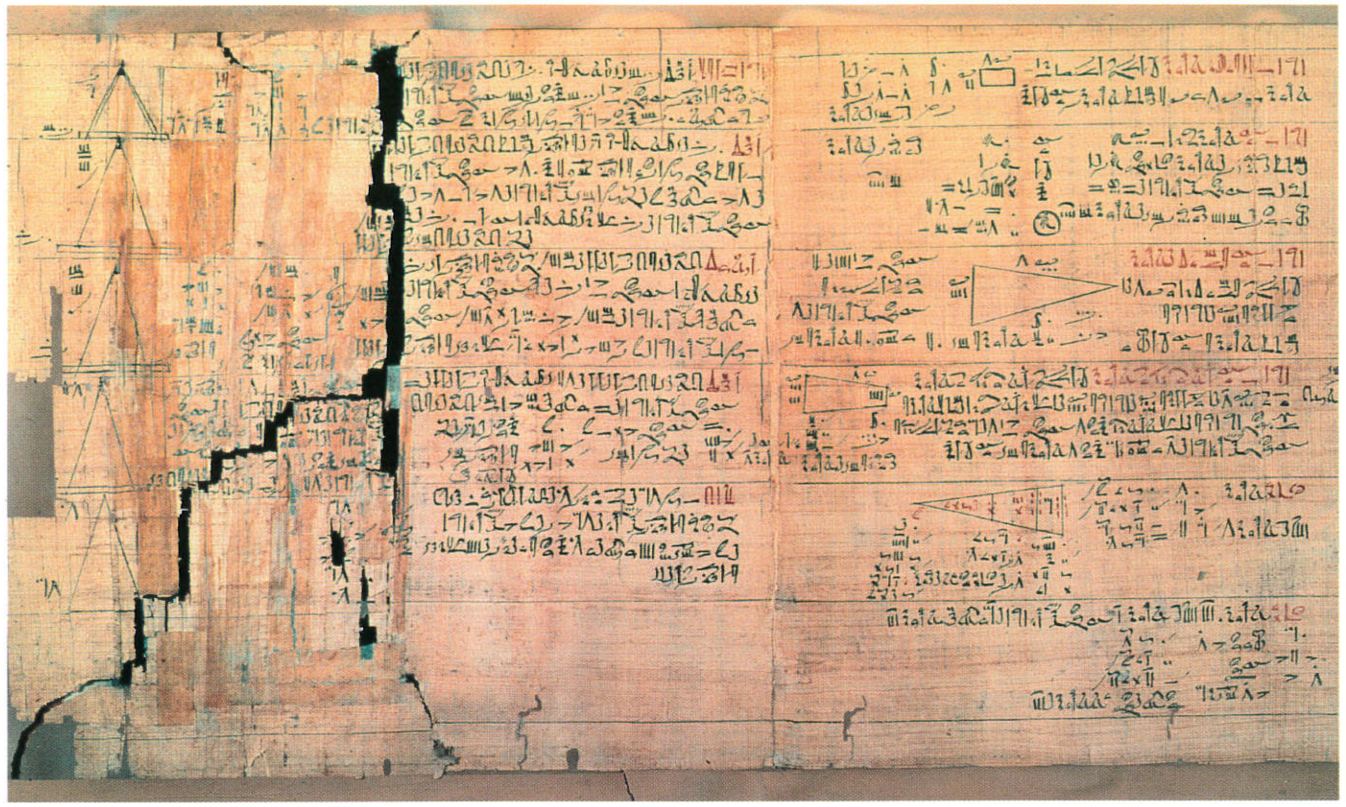
Exercice 2 :
Dans un premier temps, essayez d'écrire 1/15 ; 1/20 ; 1/28.

Exercice 3 :
D'après le paragraphe ci-dessus, qu'est-ce qu'une fraction unitaire ?
Pourquoi les fractions sont-elles représentées par le symbole ⬭ ?
Dans ce cas, le scribe égyptien peut-il représenter 1/5 ; 2/5 3/5 ; 4/5 ; 5/10 ; 5/35 ? (Attention, gardez à l'esprit qu'il y a plusieurs façons d'écrire un nombre.)

Exercice 4 :
Comment écririez-vous 2/7 ? Il vous faudra bien sûr vous plier à la règle des fractions unitaires...

Exercice 5 :
Maintenant que vous savez écrire la plupart des fractions simples en égyptien, essayons de représenter :
A = 2/3 - 1/4
Le signe + se traduit ainsi :
Et le signe - :

Écrivez le résultat en fractions unitaires.



Le papyrus Rhind et la traduction de la table de décomposition qu'il contient. © AKG

2/5	=	1/3 + 1/15	2/53	=	1/30 + 1/318 + 1/795
2/7	=	1/4 + 1/28	2/55	=	1/30 + 1/330
2/9	=	1/6 + 1/18	2/57	=	1/38 + 1/114
2/11	=	1/6 + 1/66	2/59	=	1/36 + 1/236 + 1/531
2/13	=	1/8 + 1/52 + 1/104	2/61	=	1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/15	=	1/10 + 1/30	2/63	=	1/42 + 1/126
2/17	=	1/12 + 1/51 + 1/68	2/65	=	1/39 + 1/195
2/19	=	1/12 + 1/76 + 1/114	2/67	=	1/40 + 1/335 + 1/536
2/21	=	1/14 + 1/42	2/69	=	1/46 + 1/138
2/23	=	1/12 + 1/276	2/71	=	1/40 + 1/568 + 1/710
2/25	=	1/15 + 1/75	2/73	=	1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/27	=	1/18 + 1/54	2/75	=	1/50 + 1/150
2/29	=	1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/77	=	1/44 + 1/308
2/31	=	1/20 + 1/124 + 1/155	2/79	=	1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/33	=	1/22 + 1/66	2/81	=	1/54 + 1/162
2/35	=	1/30 + 1/42	2/83	=	1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498
2/37	=	1/24 + 1/111 + 1/296	2/85	=	1/51 + 1/255
2/39	=	1/26 + 1/78	2/87	=	1/58 + 1/174
2/41	=	1/24 + 1/246 + 1/328	2/89	=	1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890
2/43	=	1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301	2/91	=	1/70 + 1/130
2/45	=	1/30 + 1/90	2/93	=	1/62 + 1/186
2/47	=	1/30 + 1/141 + 1/470	2/95	=	1/60 + 1/380 + 1/570
2/49	=	1/28 + 1/196	2/97	=	1/56 + 1/679 + 1/776
2/51	=	1/34 + 1/102	2/99	=	1/66 + 1/198
			2/101	=	1/202 + 1/303 + 1/606

Une méthode originale de multiplication...

D'après le Papyrus Rhind et le rouleau de cuir des mathématiques égyptiennes, les savants du Nil furent les premiers à utiliser la méthode de multiplication par **duplications successives**, semblable à celle utilisée dans les ordinateurs dès les années 50 (principes de la base 2).

Prenons un exemple : 25 x 46.

• Dans la colonne de gauche, on écrit le nombre 1 et dans celle de droite, le nombre 25 (25 étant plus petit que 46).

• La seconde phase consiste à doubler successivement le 1 et le 25, dans les 2 colonnes, jusqu'à ce que l'on trouve **à gauche une valeur supérieure à 46**.

• Dans cette même colonne nous marquons les nombres dont la somme est égale à 46.

• Par la suite, nous soulignons ceux qui sont sur la même ligne dans la colonne de droite.

• La dernière phase consiste à additionner tous ces nombres soulignés dans la colonne de droite pour trouver le produit de 25 par 46.

Cette démarche peut être représentée ci-dessous de la manière suivante.

1	25
•2	50
•4	100
•8	200
16	400
•32	800
64	1600

D'où 25 x 46 = 50 + 100 + 200 + 800 = 1150.

Exercice 6 :
Comparez la méthode égyptienne à la vôtre (la calculatrice est interdite !). Laquelle des deux méthode vous semble la plus simple ? Pourquoi ?

... et de division

Cette méthode fonctionne aussi à l'envers. Imaginons un scribe égyptien qui doit diviser 165/15.

"Je calcule les doubles successifs de 15 jusqu'à la valeur supérieure à 165 dans la colonne de gauche. Par la suite, je souligne tous ces doubles dont la somme est égale à 165.

Dans la colonne de droite, je calcule tous les doubles successifs de 1 jusqu'à la valeur supérieure à 15. Puis je coche les valeurs de la colonne de droite qui correspondent à celles soulignées dans la colonne de gauche.

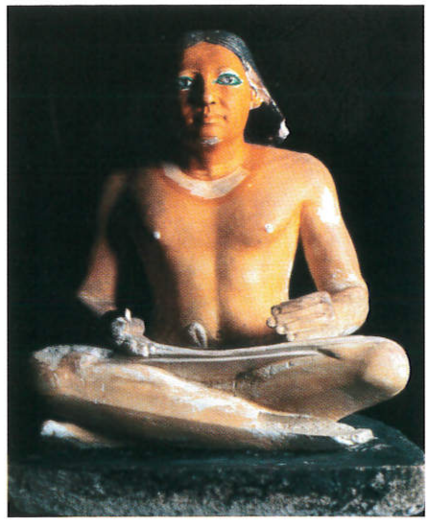
Enfin, je calcule la somme de toutes les valeurs cochées dans la colonne de droite et je trouve le résultat, c'est-à-dire le quotient de 165 divisé par 15.

15	1•
30	2•
60	4
120	8•
240	16

1 + 2 + 8 = 11, c'est le résultat cherché."

Exercice 7 :
Quelle table de multiplication utilise le scribe pour son opération ?

Exercice 8 :
Peut-il diviser 205 par 12 ? 720 par 7 ? Quels sont les avantages et inconvénients de cette méthode ?



Une statue de scribe retrouvée à Sakkara. © Guenet/AKG

Ignace Monthe

Réponse dans Eurekaté, page 37.

L'écriture des nombres en égyptien