Les premières mathématiques de l'histoire

Les premières mathématiques qui nous sont connues sont celles de deux civilisations très anciennes, en Mésopotamie et en Égypte. Elles nous ont laissé des textes permettant d'analyser et d'expliquer leurs connaissances mathématiques. La Grèce, après en avoir pris connaissance, les a développées considérablement, mais dans un esprit nouveau.

Tablette en argile provenant d'Uruk (Ourouk), à écriture pictographique pour la comptabilité. Vers 3000 av. J.-C. © G.Dagli Orti

Le nombre

L'origine des nombres est difficile à saisir, car ils ont servi à une quantité de situations depuis leur apparition. Cette origine se confond avec le langage ! Le calcul, lui, peut prendre bien des formes, mais il semble logique que le comptage ou "dénombrement" ait été la première des opérations (1, 2, 3...). Par exemple, pour vérifier la présence de toutes les bêtes d'un troupeau, le berger mésopotamien les représentait chacune par une petite pierre. Le maniement de ces pierres, plus tard appelées cailloux par les Romains (les "calculi") peut être considéré comme le premier vrai calcul. Toujours sur le même principe, il était possible de tracer des marques sur le sol ou sur une pierre.

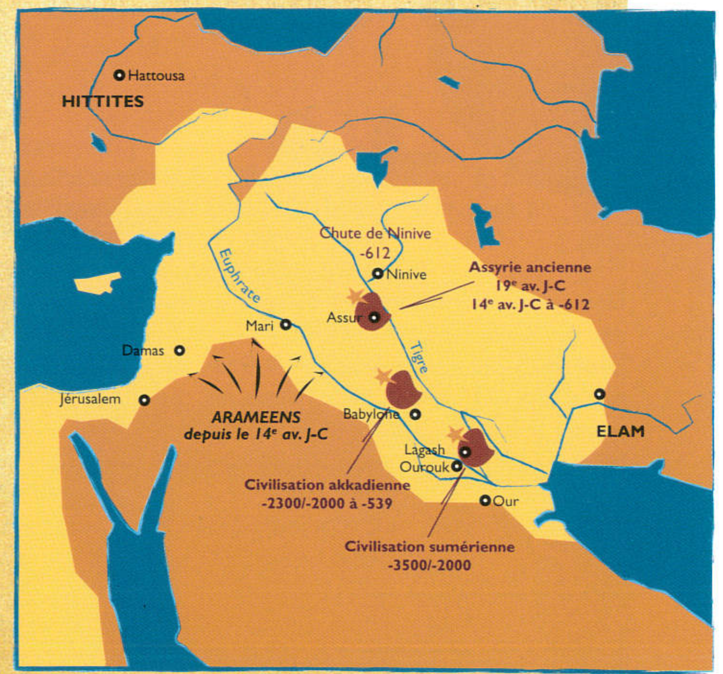
L'opération

Partant d'objets faciles à manier, ou de simples marques, le berger imagine plus facilement les échanges qu'il réalise, par exemple entre ses bêtes et des sacs de céréales, ou en achetant d'autres bêtes.

"L'opération" consiste alors à ajouter des cailloux, à en retirer ou à les ranger en ligne, ou encore les disposer en plusieurs tas identiques. Ces différents moyens de calculer se sont développés diversement au cours des civilisations. Avez-vous remarqué que nous disposons en tout de 3 moyens de dénombrement et de calcul ?

- Les objets : les cailloux chez les Mésopotamiens, les entailles sur un os, les nœuds sur les cordelettes chez les Mayas…
- Les chiffres, dans lesquels existent bien des écritures différentes.
- Les numéraux, c'est-à-dire le *langage* des chiffres et des nombres (eh oui, si l'on écrit les nombres, encore faut-il leur donner un nom correspondant. 8 se dit "huit", 47 se dit "quarante-sept", ce qui n'a rien d'évident à priori).

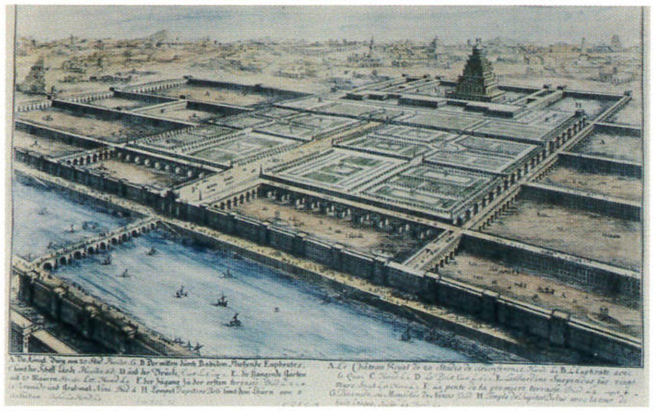
La civilisation mésopotamienne *était constituée de peuples ayant vécu entre le Tigre et l'Euphrate entre le 4e millénaire av. J.-C. et le début de notre ère. L'une de leurs capitales était* ***Babylone****. Plusieurs fouilles archéologiques amorcées au 19e siècle ont permis de découvrir des centaines de tablettes d'argile gravées au stylet cunéiforme.*
L'argile de ces tablettes, tendre et modelable, permettait de perpétuelles modifications et corrections, mais les inscriptions s'effaçaient par simple frottement. Nous devons bien souvent leur conservation jusqu'à notre époque à un accident : des incendies qui ont littéralement "cuit" l'argile, le rendant plus résistant. Environ 320 tablettes concernent les mathématiques. Elles datent soit d'entre 1800 et 1500 av. J.-C. lors de la première dynastie babylonienne, sous le règne d'Hammurabi, soit d'entre 600 av. J.-C. et 300 après J.-C. pendant les périodes perse, hellénistique et romaine.
Les premières interprétations des tablettes permettant d'évaluer le niveau de leurs connaissances sont à attribuer aux chercheurs Neugebauer et Thureau-Dangin. Plus proches de nous, d'autres chercheurs ont publié les textes mathématiques de Suse. Actuellement, d'autres tablettes découvertes sur les sites d'Uruk et de Suse sont en train d'être analysées. Une visite guidée au musée du Louvre à Paris ou au British Museum à Londres vous permettrait de découvrir ces curiosités extraordinaires.



Centre de civilisation

Extension maximale de l'empire assyrien dans la première moitié du 7e s. av. J-C

La Mésopotamie et ses villes principales, centres de culture et de civilisation.



Babylone a marqué l'histoire par sa démesure et sa richesse. Sur cette gravure des années 1700, on voit une reconstruction, d'après des récits d'auteurs grecs, des jardins de Sémiramis, parfois attribués à cette reine légendaire. Mais on pense maintenant qu'ils ont été construits par Nabuchodonosor II pour sa femme Amytis. Bien qu'ils aient disparu au début de notre ère, ils font partie des 7 merveilles du monde. © AKG Paris.

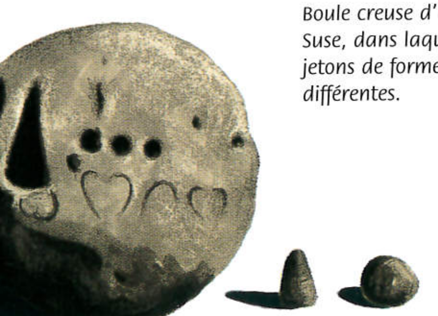
Comment compter en Mésopotamien

Vers 3500 av. J.-C, la Mésopotamie invente l'écriture. Elle est administrée par des rois très puissants, qui bâtissent des cités et possèdent de vastes greniers de marchandises. Les richesses du royaume, devenant de plus en plus importantes, doivent être recensées, mesurées et contrôlées pour la prospérité du royaume et la grandeur du roi.

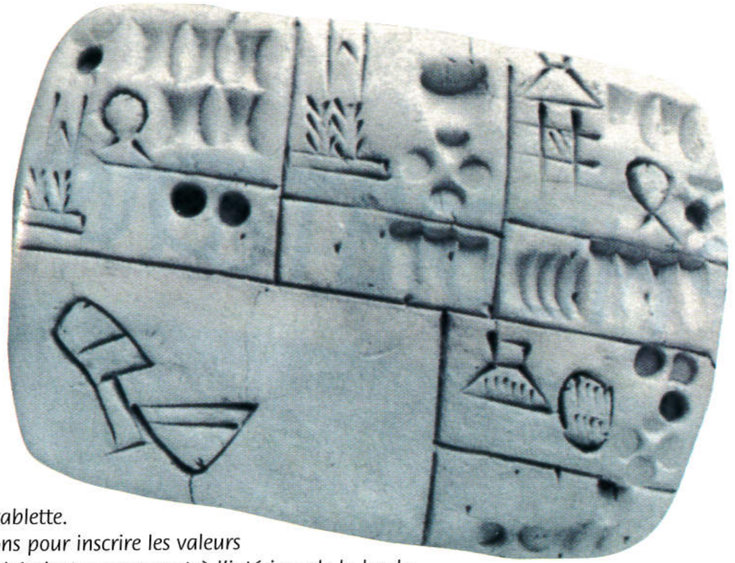
Bien auparavant, tant que les quantités d'objets à compter étaient petites, leurs ancêtres évaluaient le nombre d'animaux en entaillant un os, une branche, ou en alignant des cailloux (comme le berger ci-dessus). Ces systèmes de dénombrement, (comptage) devenus désuets, ont été remplacés par d'autres plus astucieux et plus avantageux. À ce stade, on peut se poser deux questions :

- comment se présentent ces premiers chiffres ?
- comment s'imagine le calcul chez les Mésopotamiens ?

Du jeton taillé à l'empreinte



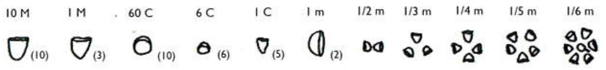
Boule creuse d'argile, retrouvée à Suse, dans laquelle on a retrouvé des jetons de forme et de taille différentes.

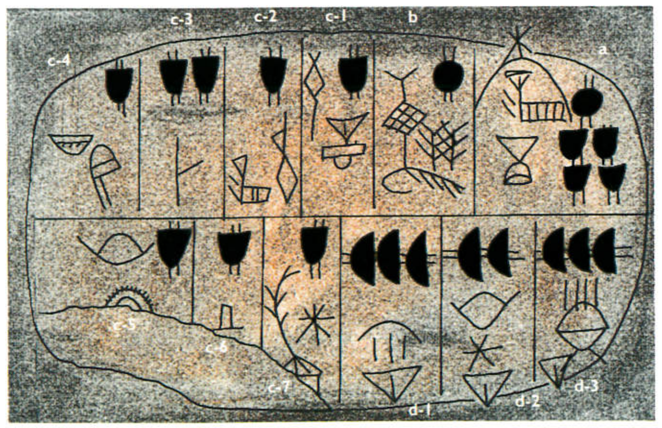


La boule d'argile est aplatie en tablette. On y appose l'empreinte des jetons pour inscrire les valeurs et quantités de marchandises qui étaient auparavant à l'intérieur de la boule.

Des tablettes, des boules d'argile et des jetons ont été retrouvés sur les sites des cités antiques de Suse et d'Uruk. Elles nous ont donné bien des indices. Ainsi le passage du comptage des cailloux aux chiffres écrits se serait déroulé suivant 3 étapes.

- Dans la première étape, les artisans du Roi, grâce aux recommandations de ses conseillers financiers, reprennent l'idée de remplacer les cailloux par des jetons en terre cuite qu'ils taillent différemment suivant leur valeur : 1 ; 10 ; 60 ; 600 ; 3 600 ; 21 6000…
- La seconde étape consiste à enfermer ces jetons dans une bulle (boule creuse) en argile, en indiquant qu'ils appartiennent au même propriétaire. Mais avant la fermeture de la boule, ces jetons sont enfoncés à sa surface afin de laisser de petites marques indiquant la valeur de la marchandise du propriétaire.



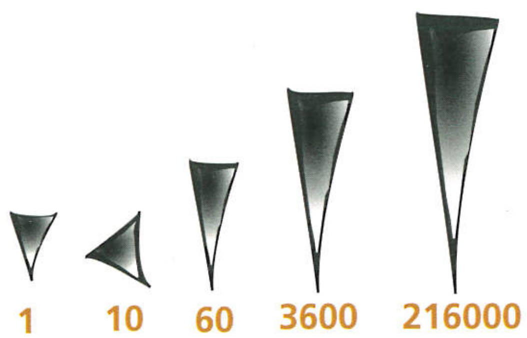


Les Mésopotamiens utilisaient plusieurs types de mesures permettant d'évaluer les quantités de marchandises. Ce texte sumérien d'Uruk présente la quantité de blé attribuée à un groupe d'hommes et de femmes. "M" : unité supérieure. "C" : unité principale. "m" : unité inférieure. Les attributions des parts pour les 6 hommes (c-1 ; c-2 ; c-4 ; c-5 ; c-6 et c-7) sont de 1 C. Un homme (en c-3) va recevoir 2 C. Les 3 femmes (d-1 ; d-2 et d-3) vont recevoir respectivement 3 m ; 2 m et 3 m, soit à peu près 2 fois moins que les hommes.

- Pour l'ultime étape, la boule est aplatie en une tablette. En aval de ces besognes importantes exécutées par l'artisan et le conseiller financier du Roi, intervient le scribe. Avec la pointe d'un roseau, celui-ci inscrit dans l'argile tendre des symboles sous forme de pictogrammes représentant la valeur et la nature des marchandises.

Les premiers nombres de l'humanité naîtront ainsi de l'association, de la combinaison d'encoches et de trous circulaires qui remplaceront les jetons enfermés dans la boule. Ce système sans cesse amélioré, deviendra plus lisible vers 2010 av. J.-C., avec la vulgarisation en Mésopotamie de l'**écriture cunéiforme**. Ainsi, des clous, des pointes de flèche et leurs combinaisons représentent à la fois des nombres, des lettres ou des syllabes.

On admet couramment qu'un "chiffre" est le signe unique représentant une valeur dans le système de comptage choisi. Un nombre est la combinaison de chiffres, un ou plusieurs, pour désigner une quantité. Subtile nuance !



Manque de place ! On compresse l'écriture des nombres

Dessin d'après une tablette d'argile provenant de Larsa. Elle est écrite en cunéiforme babylonien archaïque. Les chevrons représentent 10 et les traits, 1. La première ligne indique que 40 x 60 + 1 est égal à 49 au carré, la seconde ligne, que 41 x 60 + 40 est égal à 50 au carré. *© M. Caveing*

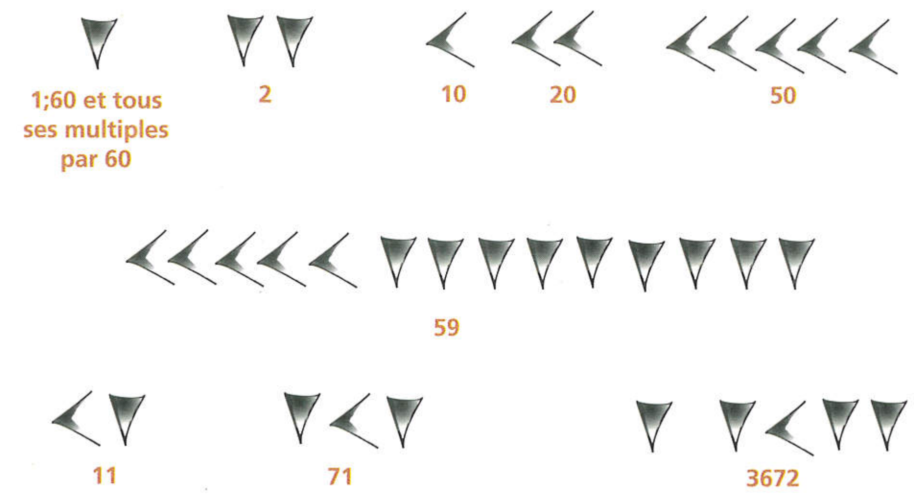
Seuls deux signes différents apparaissent pour désigner l'unité et le nombre 10 ; pour tous les autres supérieurs à 60 (par exemple 71), des combinaisons de ces deux signes interviennent suivant le principe de position. La grandeur d'un nombre dépend donc du contexte dans lequel il est écrit, le même signe pouvant valoir 1 ; 60 ; 600 ; 3 600 ; 216 000 ; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{3600}$…

Exercice 1 :
Tout comme un scribe mésopotamien, écrivez en "cunéiforme" les nombres de 1 à 9, puis 11, 20, 37, 59... afin de vous exercer. Quelles difficultés rencontrez-vous ?

Mais faute de place sur la tablette d'argile, le scribe n'arrive pas à inscrire correctement le 60 voire le 3 600 ou pire encore, le 216 000. Face à ce problème épineux, les savants mésopotamiens vont trouver une nouvelle parade en adoptant le **principe de position**.
C'est-à-dire que le 1, le 60, le 600, le 3 600, le 216 000 et tous les autres multiples de 60 s'écriront maintenant de la même façon, seule leur position dans la série de chiffres composant le nombre permettra de les distinguer.

Un calcul de surfaces de terrain à Umma (région sumérienne). *© Lessing AKG*

Voici comment se présente le nouveau système de numération mésopotamien vers 1700 av. J.-C.



D'après l'examen des textes les plus anciens, les Mésopotamiens ignoraient le zéro comme valeur.

Pour calculer, il faut une "base"

Mais qu'est-ce qui se cache derrière ce système de numération mésopotamien ? D'abord expliquons clairement comment écrire les nombres 71 ; 3 672 ; 10 963.

Pour écrire 71 il suffit d'établir l'égalité :
71 = (1 x 60) + (1 x 10) + 1

Pour écrire 3 672 on établit l'égalité :
3 672 = (1 x 3 600) + (1 x 60) + (1 x 10) + 2

Pour écrire 10 963 on établit l'égalité :
10 963 = (3 x 3 600) + (2 x 60) + (4 x 10) + 3

Soient :

$71 = 60^1 + 10 + 1$

$3672 = \underbrace{60^2}_{\underbrace{60 \times 60}_{3600}} + 60^1 + 10 + 2$

$10963 = (3 \times \underbrace{60^2}_{3600}) + (2 \times 60^1) + (4 \times 10) + 3$

Comme ces trois nombres sont tous supérieurs à 60, on vérifie d'abord combien de fois ils sont multipliés par 60 ; puis pour chacun des restes, inférieurs à 60, on recherche combien de fois ce reste est multiplié par 10. Enfin, on calcule les unités restantes.
Par exemple pour 10 963, on opère comme si l'on devait convertir 10 963 secondes (s) en heures (h) puis en minutes (min) et le reste en secondes. Ce que vous savez tous faire.

Rappel : 1 h = 60 min ; 1 min = 60 s ; 1 h = 3 600 s.

Dans 10 963 s, il y a 3 h et restent 163 s soient 2 min et 43 s ; car :

10963 s	3600
- 10800	3 h
0163 s	

On divise les secondes par 3 600 pour trouver le nombre d'heures correspondant.

163 s	60
- 120	2 mn
043 s	

On divise le reste en secondes par 60 pour trouver le nombre de minutes correspondant.

Vous comprenez pourquoi nous écrivons :
10 963 s = 3 h 2 min 43 s ou bien
10 963 = (3 x 3 600) + (2 x 60) + 43.

Nous avons écrit plus haut : 1 h = 60 min ; 1 min = 60 s ; 1 h = 3 600 s. Cette façon de multiplier les heures par 60 pour passer aux minutes ou de multiplier les minutes par 60 pour passer aux secondes signifie **utiliser 60 comme le nombre de référence** pour mesurer notre temps. En langage plus savant nous dirons que pour mesurer le temps nous utilisons **la base 60**. Reprenons les calculs effectués ci-dessus en les détaillant. (Par "ordre" nous entendons l'idée de "puissance". Par exemple 60^2 est d'ordre 2.)

10963 s	60		
- 10920	182 mn	60	
043 s	-180 mn	3 h	60
	2 mn	3 h	0

Donc 10 963 (en base 10) s'écrit en base 60 :
3 unités "d'ordre 2"
+ 2 unités "d'ordre 1"
+ 43 unités "d'ordre 0".

Soit $\{10\,963\}_{10} = (3 \times 60^2) + (2 \times 60^1) + (43 \times 60^0)$
$= (3 \times 3\,600) + (2 \times 60) + (43 \times 1)$

D'où la définition suivante :
Une base peut ainsi être définie comme étant le nombre à partir duquel on multiplie une unité pour passer d'un ordre au suivant. Notre système décimal ou système "à base 10" utilise les multiples de 10 ; car pour passer des unités aux dizaines et des dizaines aux centaines, **nous multiplions chaque fois par 10**.

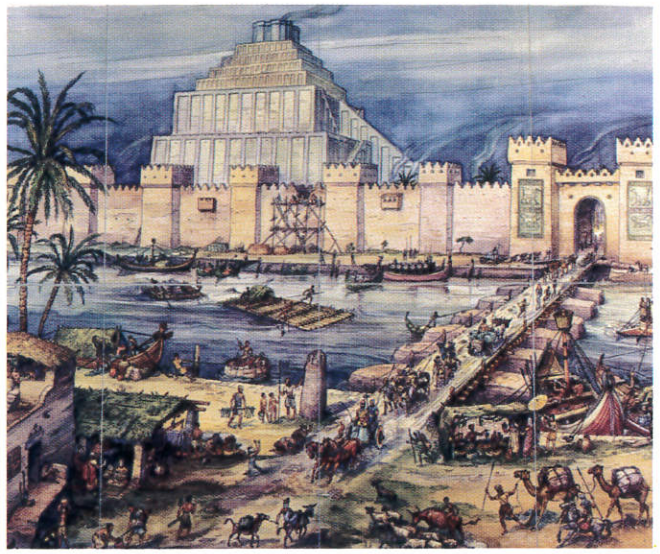
Dans l'écriture babylonienne de 10 963, nous constatons que les 3 unités de 3 600 (ou 60^2) sont plus décalées vers la gauche que les 2 unités de 60, elles-mêmes plus positionnées à gauche que les 43 unités restantes. En définitive pour écrire un nombre, le scribe babylonien tient compte des principes de **base** et de **position**.

Exercice 2 :
Écrivez 86 ; 3 686 ; 216 086 en base 60 en suivant la démarche indiquée ci-dessus.
Puis traduisez-les en langage mésopotamien.
Notez-vous des ressemblances ou des différences intéressantes ?

La représentation des fractions

Pour leurs calculs, les savants babyloniens manipulaient aisément les fractions car comme 60 a beaucoup plus de diviseurs que 10, le principe de position des babyloniens les favorise par rapport à ceux qui utilisent la base 10 comme le faisaient les Égyptiens.

Ils savaient ainsi représenter les fractions comme 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; 1/15 ; 1/20 ; 1/30. Vous remarquez au passage que les dénominateurs de toutes ces fractions sont des diviseurs de 60…



La vie à Babylone : le commerce et les échanges intensifs, dans cette ville comme ailleurs, ont fait naître le besoin de calculer. © AKG.

La division chez les Mésopotamiens

Imaginons qu'un scribe doive effectuer par exemple l'opération 165/15, c'est-à-dire 165 x 1/15

Le scribe babylonien se dit :
"J'écris 165 en base 60 : 165 = 2 x 60 + 45.

Je trouve l'inverse de 15 : l'inverse de tout nombre **a** (différent de 0) est **1/a**. L'inverse de 15 est 1/15.

D'ailleurs 165/15 = 165 x 1/15
Comme 1/15 s'écrit 4/60 en base 60, alors :
165/15 = 165 x 4 /60

Or 165 = (2 x 60) + 45

Soit 165 x 4/60 = [(2 x 60) + 45] x 4/60
= (2 x 60) x 4/60 + 45 x 4/60
= 8 x 60/60 + 180/60."
= 8 x 1 + 3
= 8 + 3
= 11".

Comment les Babyloniens représentaient-ils 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ?

1/2 = 30/60 soit 30/60 de l'unité ; c'est-à-dire 1/2 est l'équivalent de 30 x 1/60. Il s'écrit donc comme 40.

Ceci est 1 + 1/2 ou 3/2, car 3/2 = 90/60, c'est-à-dire 90 fois 1/60 

4/3 = 80/60 ou 1 + 1/3 ou 

c'est-à-dire 80 x 1/60

5/4 = 75/60 ou 1 + 1/4 ou 

c'est-à-dire 75 x 1/60

Comme nous l'avons souligné plus haut, 1/60 s'écrit comme 1 ; 60 ; 3 600 ; 216 000 c'est-à-dire $60^3 = 60 \times 60 \times 60 =$ 216 000.

Exercice 3 :
Essayons maintenant avec des fractions :
écrivez (en mésopotamien toujours) 22 ; 3/7 ; 12 ; 1/5 ; 1/12.
Indice : 1/60 s'écrit comme 60, 3 600, etc.
Indice n°2 : Dans ce langage, le contexte dans lequel le nombre est écrit reste très important !

Sachant que 205 = (3 x 60) + 25 ; est-il possible pour le scribe de calculer le quotient de 205 par 12 ; puis de 205 par 13 ?

Réponses dans Eurêkaté, page 35

Un contrat en écriture cunéiforme du 1er millénaire av. J.-C. trouvé en Cappadoce (Turquie actuelle). © RMN.

Ignace Monthe
Professeur agrégé, ingénieur, docteur en mathématiques