AP du 15 Octobre 2019 : Vrai - Faux

Définition
Une proposition est une phrase mathématique qui est soit juste, soit fausse.

Exemples
- *Il fait beau* n'est pas une proposition car on ne sait pas toujours si cette affirmation est vraie ou fausse.
- *J'appelle I le milieu de [CD]* n'est pas une proposition.
- $x+5=7$ *pour* $x=2$ est une proposition vraie.
- $5^2+7=33$ est une proposition fausse.

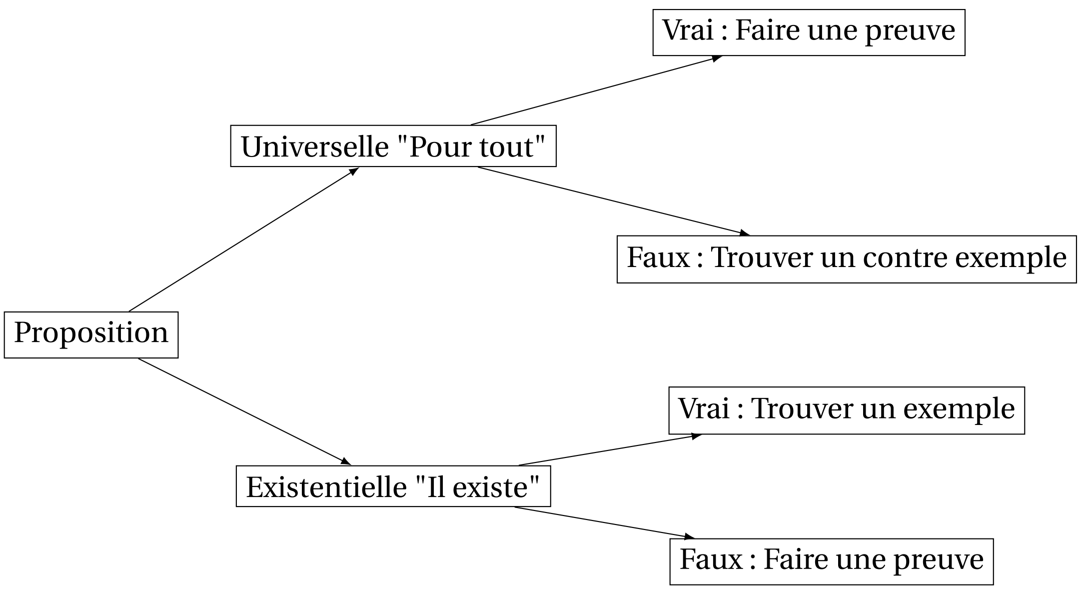
Définitions
On appelle **proposition universelle** une proposition concernant tout un ensemble d'objets.
On appelle **proposition existentielle** une proposition concernant un élément de l'ensemble d'objets.

Exemples
- *Tous les élèves de la classe A sont des garçons* est une proposition universelle car la propriété "être un garçon" concerne tous les élèves de la classe.
- *Il existe un élève de la classe qui est un fille* est une proposition existentielle car la propriété ne concerne qu'un seul élève de la classe.
- *Tous les carrés de nombres sont positifs* est une proposition universelle.
- *Il existe un nombre plus petit que 1* est une proposition existentielle.

En mathématiques, pour étudier la véracité d'une proposition universelle il suffit d'exhiber un contre-exemple si elle est fausse et faire une démonstration si elle est vraie.

Pour étudier la véracité d'une proposition existentielle il suffit d'exhiber un exemple si elle est vraie et faire une démonstration si elle est fausse.

Ce que l'on peut résumer par ce schéma :



$x^2=2x$ est une proposition à priori fausse si x peut prendre les valeurs de tous les nombres. Cependant si $x=0$ ou $x=2$ la proposition devient vraie.

Il est donc important de préciser le domaine de validité de la proposition afin qu'il n'y ait aucune ambiguïté.

Exemples

- La proposition "Pour tout nombre x, $3(x+2)=7x$" est fausse puisque pour $x=2$, $3(2+2)=12$ alors que $7\times 2=14$
  (le nombre 2 est un contre-exemple)
- La proposition "Dans un triangle ABC, $AB^2+BC^2=AC^2$" est fausse puisque si le triangle vérifie $AB=2$, $BC=5$, $AC=6$. On a $AB^2+BC^2=2^2+5^2=29$ et $AC^2=6^2=36$
- La proposition "Pour tout x, $(2x+1)^2-1=4x(x+1)$" est vraie puisque :
  $(2x+1)^2-1=(2x)^2+2\times(2x)\times 1+1^2-1=4x^2+4x+1-1=4x^2+4x$
  et $4x(x+1)=4(x^2+x)=4x^2+4x$.
  Donc pour tout x, on a : $(2x+1)^2-1=4x(x+1)$
- La proposition "Pour tout x, $(2x+1)^2=4x^2+1$" est fausse car
  si $x=1$: $(2x+1)^2=3^2=9$ et $(4x^2+1=4+1=5$