Chapitre 3 : Premier degré

1 Fonctions affines

Définition 1 : fonction affine

Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Si $a = 0$ alors f est une fonction constante.
Si $b = 0$ alors f est une fonction linéaire.

Propriété 1 : représentation graphique d'une fonction affine

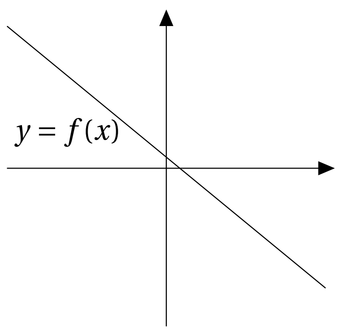
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
Alors la représentation graphique de f dans un repère du plan est une droite passant par le point de coordonnées $(0, b)$.
Le nombre b est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

Propriété 2 : propriété fondamentale des fonctions affines

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$

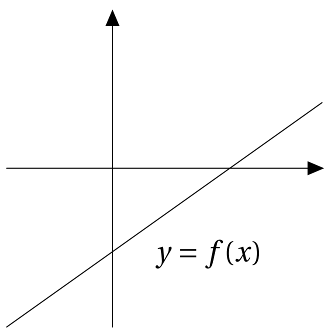
- Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$
- Si $a > 0$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite.



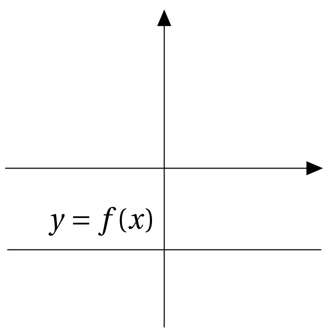
$f(x) = ax + b$ avec $a < 0$

fonction affine décroissante



$f(x) = ax + b$ avec $a > 0$

fonction affine croissante



$f(x) = ax + b$ avec $a = 0$

fonction affine constante

Exemple 1
Déterminer parmi les fonctions suivantes, celles qui sont affines.

1. $f_1(x) = 3x + 2$
2. $f_2(x) = 3x^2 + 2$
3. $f_3(x) = \dfrac{4}{x} + 1$
4. $f_4(x) = -5x + 9$
5. $f_5(x) = 4\sqrt{x} + 6$
6. $f_6(x) = 1 - 3x$

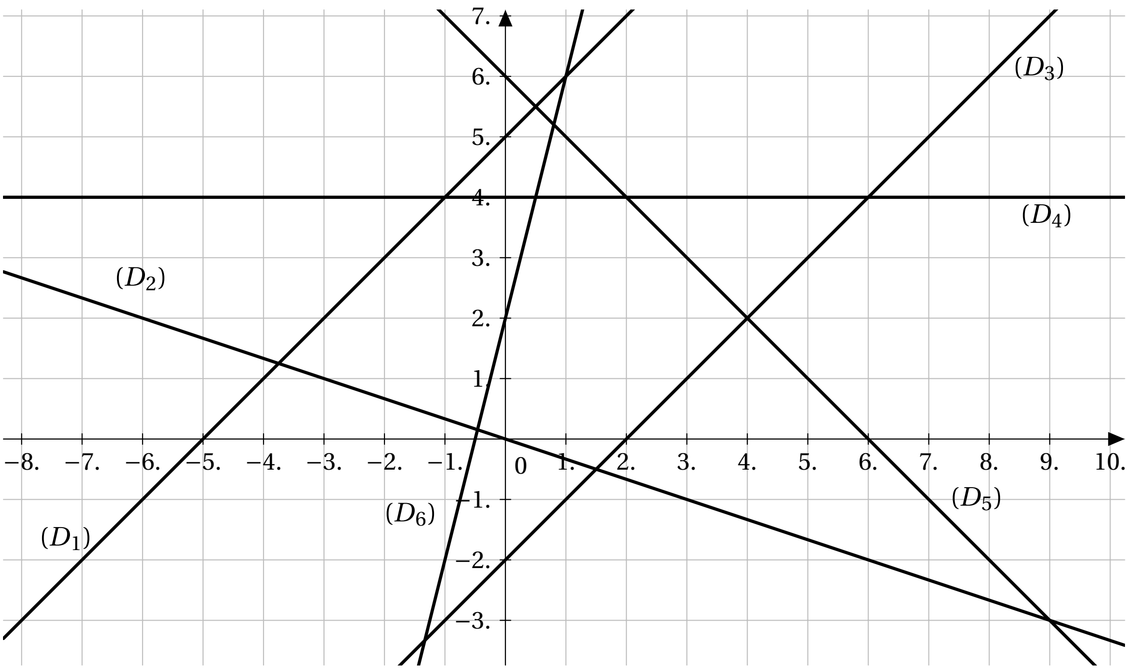
Exemple 2
Dans chaque cas, déterminer la fonction affine qui vérifie les égalités :

1. $f(1) = 3$ et $f(4) = 9$
2. $f(0) = 3$ et $f(1) = 0$
3. $f(-4) = -1$ et $f(8) = 2$
4. $f(5) = 1$ et $f(3) = -3$
5. $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + 1$ et $f(-2) = -1$
6. $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$

Exemple 3
Dans chaque cas, préciser si la fonction peut être affine.

1. $f(0) = 5$; $f(3) = 6$ et $f(6) = 7$
2. $f(1,2) = 2,4$; $f(-2) = -4$ et $f(3) = 6$
3. $f(8) = 13$; $f(13) = 21$ et $f(21) = 34$
4. $f(-1) = 3$; $f(1) = 3$ et $f(5) = 3$.

Exemple 4
Déterminer les expressions des fonctions affines représentées par les droites $(D_i)(i = 1...6)$ suivantes :



2 Équations du premier degré à une inconnue

2.1 Définitions

Définition 2 : équation

Une équation est une expression algébrique comportant un symbole d'égalité et une inconnue.

Définition 3 : solution d'une équation

Un nombre réel x_0 est solution d'une équation si ce nombre rend l'égalité vraie.

Exemple 5
Dans chaque cas, dire si le nombre x_0 est solution de l'équation (E) proposée.

1. $(E) : (x-1)^2 = 1-2x$ et $x_0 = \sqrt{2}$
2. $(E) : \dfrac{7x+4}{(7x-3)^2} = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{8}{7}$ et $x_0 = \dfrac{3}{4}$
3. $(E) : (x-1)^2 - 2\sqrt{10} = -2x+8$ et $x_0 = \sqrt{2}+\sqrt{5}$
4. $(E) : (3x+7)^2 - (5x+9) = (x-2)(7x-8) + 3(x-2)(x-4)$ et $x_0 = 0$

Définition 4 : résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Définition 5 : équations équivalentes

Deux équations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

Définition 6 : équation du premier degré

Une équation est dite du premier degré si, après d'éventuelles simplifications, l'inconnue ne figure qu'avec une puissance égale à 1

Exemple : L'équation $(3x-2)^2 - (9x+1)(x+5) = 7x+2$ est une équation du premier degré.
car .....

Propriété 3 : équations équivalentes

Soit (E) une équation
- On obtient une équation équivalente en ajoutant un même nombre aux deux membres de (E).
- On obtient une équation équivalente en multipliant les deux membres de (E) par une expression non nulle.

2.2 Méthode de résolution d'une équation du premier degré

Après avoir éventuellement développé et réduit, on se ramène à une équation du type $ax = b$ en utilisant la propriété 3.

Exemple 6
Résoudre les équations :

1. $(E_1) : 2(x-1) - 3(x+1) = 4(x-2)$
2. $(E_2) : 8(4-3x) + 1 = 53 - (x-5)$
3. $(E_3) : \dfrac{x}{2} + \dfrac{1-2x}{3} = 2 - \dfrac{5x-2}{6}$
4. $(E_4) : \dfrac{x-1}{4} - 5 = \dfrac{2x-3}{2} + \dfrac{3}{4}$
5. $(E_5) : 7(x-4) + 3(2x-1) = 4(3x-2) + (x+4)$
6. $(E_6) : 5(2x+1) - 3x - 7 = 4x - 5 + 3(x-1) + 6$
7. $(E_7) : \dfrac{2x+7}{5} = \dfrac{4}{7}$
8. $(E_8) : \dfrac{2x+3}{2} = \dfrac{7x-2}{3}$
9. $(E_9) : (x+2)(x+1) = (x+4)(x-5)$
10. $(E_{10}) : (6x+1)(x-1) = (2x+4)^2 - 2(x-5)(-x+2)$
11. $(E_{11}) : x\sqrt{2} + \sqrt{2} = x\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - (2-\sqrt{2})$
12. $(E_{12}) : 2x + \sqrt{2} = x\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - (7-\sqrt{2})$

Exemple 7
Résoudre les équations :

1. $(E_1) : \dfrac{3x+2}{x+1} - \dfrac{3x+4}{x-1} = \dfrac{5x}{x^2-1}$
2. $(E_2) : \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{7}{x+8}$
3. $(E_3) : \dfrac{3x^2+4x+1}{(2x+2)(3x+1)} = \dfrac{1}{2}$
4. $(E_4) : \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2x}{x+2} - 2 = \dfrac{-16}{4-x^2}$
5. $(E_5) : \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x-2}$

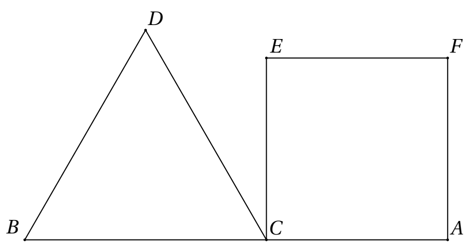
2.3 Mise en équation d'un problème

Démarche
La démarche se déroule en quatre étapes :

1. Choix de l'inconnue
Il s'agit de nommer par une lettre la (ou les) inconnue(s) choisie(s) en précisant bien les unités s'il s'agit de mesure de grandeur.
2. Mise en équation
Grâce aux données de l'énoncé, on explique comment le problème peut se traduire par une (ou plusieurs) équation(s.
3. Résolution
On précise l'ensemble de définition et on conclut sur la solution éventuelle de l'équation.
4. Conclusion
On répond au problème en écrivant une phrase de conclusion.

Exemple 8

1. On retranche un même entier au numérateur et au dénominateur de $\frac{23}{18}$ et on obtient son inverse.
Quel est ce nombre ?
2. Si on additionne le même nombre entier au numérateur et au dénominateur de $\frac{4}{7}$, on obtient $\frac{12}{13}$
Quel est ce nombre ?
3. Si on augmente de 5 m un côté d'un carré et si on diminue de 3 m l'autre côté, on obtient un rectangle de même aire que celle du carré.
Combien mesure le côté de ce carré ?
4. Le carré $ACEF$ et le triangle équilatéral BCD ont le même périmètre.
Quelle est la mesure d'un côté du triangle sachant que $AB = 10$?



3 Systèmes de deux équations à deux inconnues

3.1 Définitions

Définition 7 : solution d'équation à 2 inconnues

Un couple de nombres réels (x_0, y_0) est solution d'une équation à deux inconnues si ces nombres rendent l'égalité vraie.

Exemple 9
Dans chaque cas, dire si le couple (x_0, y_0) est solution de l'équation (E) proposée.

1. $(E_1) : 3x+2y-1=0$ et $(x_0, y_0) = (3,4)$
2. $(E_2) : -x+7y = x+3y-8$ et $(x_0, y_0) = (-2,-4)$
3. $(E_3) : (x-1)^2+(y-1)^2 = 0$ et $(x_0, y_0) = (1,-1)$
4. $(E_4) : \sqrt{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}y = 2-\sqrt{2}$ et $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$

Définition 8 : solution d'un système de 2 équations à 2 inconnues

Un couple (x_0, y_0) est solution d'un système de deux équations à deux inconnues s'il est solution des deux équations à la fois.

Exemple 10
Dans chaque cas, dire si le couple (x_0, y_0) est solution du système (S) proposé.

$$(S_1) : \begin{cases} 8x-2y=0 \\ 3x+y=5y \end{cases} \quad \text{et } (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$(S_2) : \begin{cases} 3x+y=-1 \\ 5x-2y=0 \end{cases} \quad \text{et } (x_0, y_0) = (1,-4)$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x+\sqrt{2}y=-x \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{2}=0 \end{cases} \quad \text{et } (x_0, y_0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$(S_4) : \begin{cases} y=3x \\ -y^2=x-y \end{cases} \quad \text{et } (x_0, y_0) = (2,6)$$

Définition 9 : résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues

Résoudre un système d'équation, c'est trouver <u>toutes</u> ses solutions.

Définition 10 : systèmes équivalents

Deux systèmes de deux équations à deux inconnues sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

3.2 Méthode de résolution

Propriété 4 : systèmes équivalents

Soit (S) un système de deux équations à deux inconnues (E_1) et (E_2).
Alors le système (S') composé des deux équations (E_1) et $(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2)$ avec $\lambda_2 \neq 0$ est équivalent à (S)

En pratique, on utilise cette propriété pour faire disparaître l'une des deux inconnues dans l'une des deux équations. Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par combinaisons linéaires et se généralise à des systèmes de dimensions supérieures.

Exemple 11
Résoudre les systèmes suivants.

$(S_1) : \begin{cases} 3x+4y=16 \\ -5x+7y=28 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_2) : \begin{cases} 4x+2y=8 \\ 3x+5y=13 \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} 2x+y=x+1 \\ 2x+y-2=-y \end{cases}$ $\qquad$ $(S_4) : \begin{cases} 3x+y=4 \\ 6x+2y=5 \end{cases}$

Exemple 12
Résoudre les systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 2x+y-z=-2 \\ x-3y-2z=-5 \\ 3x+2y+z=9 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_2) : \begin{cases} x-y+2z=-5 \\ 2x+y-z=3 \\ -2x+2y-4z=912 \end{cases}$

3.3 Résolution de problèmes

Exemple 13

1. Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants.
   Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 29 € et un autre groupe de cinq enfants avec quatre adultes paie 70,5 €.
   Déterminer le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour un adulte.
2. Un groupe de 40 personnes s'est inscrit pour une visite guidée en bus de Paris.
   Les adultes paient 9 € et les enfants 5 €. Le responsable du groupe a remis 312 € à l'organisateur du circuit.
   Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?
3. La somme de deux nombres est 133. Si on les augmente chacun de 5, leur rapport est $\frac{4}{7}$.
   Quels sont ces deux nombres ?

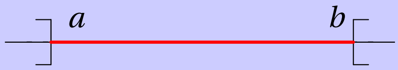
4 Inéquations du premier degré à une inconnue

4.1 Intervalles

Définition 11 : intervalles

Soient a et b deux réels.
L'intervalle fermé $[a\ ;\ b]$ est l'ensemble des réels x vérifiant : $a \leqslant x \leqslant b$.

L'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$ est l'ensemble des réels x vérifiant : $a < x < b$.

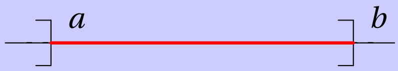


L'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $[a\ ;\ b[$ est l'ensemble des réels x vérifiant :

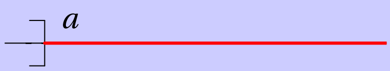
$$a \leqslant x < b.$$

L'intervalle ouvert à gauche et fermé à droite $]a\ ;\ b]$ est l'ensemble des réels x vérifiant :

$$a < x \leqslant b.$$

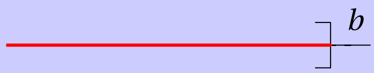


L'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des réels x vérifiant : $x > a$.

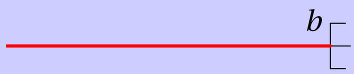


L'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des réels x vérifiant : $x \geqslant a$.

L'intervalle $]-\infty\ ;\ b]$ est l'ensemble des réels x vérifiant $x \leqslant b$.



L'intervalle $]-\infty\ ;\ b[$ est l'ensemble des réels x vérifiant $x < b$.



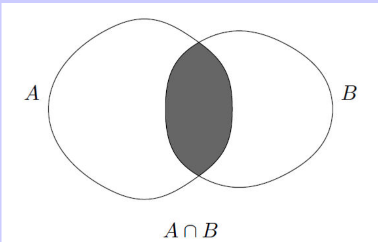
Exemple 14
Compléter le tableau suivant :

Notation d'intervalle	Inégalités correspondantes	Représentation sur un axe gradué
$[-3;\ 5]$		
$]-6\ ;\ 1]$		
	$x \leqslant 3$	
	$x > 5$	
	$-3 < x \leqslant 5$	
	$-2 \leqslant x \leqslant 3$	

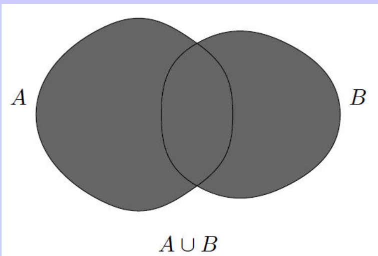
Définition 12 : réunion et intersection

Soient A et B deux ensembles.

- L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** B. On la note $A \cap B$



- La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** B. On la note $A \cup B$



Exemple 15
On considère deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$.
Déterminer dans chaque cas : $A \cup B$; $A \cap B$; $\overline{A}$; $\overline{B}$.

1. $A =]-5\ ;\ 4[$ et $B = [2\ ;\ 7]$
2. $A = [-3\ ;\ 5]$ et $B =]1\ ;\ +\infty[$
3. $A =]-\infty\ ;\ 7]$ et $B =]-1\ ;\ 5]$
4. $A =]-\infty\ ;\ 2]$ et $B =]-3\ ;\ +\infty[$
5. $A =]-\infty\ ;\ 0[$ et $B = [3\ ;\ 8]$

4.2 Définitions

Définition 13 : inéquations

Une inéquation est une expression algébrique comportant un symbole d'inégalité et une inconnue.

Définition 14 : solution d'une inéquation

Un nombre réel x_0 est dit solution d'une inéquation si ce nombre rend l'inégalité vraie.

Exemples

- Le nombre 3 est solution de l'inéquation $2x-1<7$ car $2\times 3-1=5$ et $5<7$.
  En revanche, le nombre 4 n'est pas solution de cette inéquation :
- Le nombre 4 est solution de l'inéquation $2x-1\leqslant 7$.

Définition 15 : inéquations équivalentes

Deux inéquations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

Propriété 5 : inéquations équivalentes

Soit (I) une inéquation.
- On obtient une inéquation équivalente en ajoutant un même nombre aux deux membres de (I).
- On obtient une inéquation équivalente en multipliant les deux membres de (I) par un même nombre **strictement positif**.
- Si on multiplie les deux membres de (I) par un nombre strictement négatif, on trouve une inéquation équivalente à (I) en inversant le symbole d'inégalité.

4.3 Méthode de résolution d'une inéquation du premier degré

Après avoir éventuellement développé et réduit, on se ramène à une inéquation du type $ax\leqslant b$ ou $ax<b$ ou $ax\geqslant b$ ou $ax>b$ que l'on résout simplement.

Exemple 16
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(I_1): 3x+1\leqslant 2x-3$
2. $(I_2): 3(7x-1)-2(x-3)>x+3$
3. $(I_3): -4(x-2)(x+5)\geqslant 2(-2x+1)(x-4)$
4. $(I_4): -(3x+2)+(5x-4)<2x$
5. $(I_5): 2x+1\leqslant (x-1)-(-x-3)$

4.4 Encadrements

Propriété 6 : somme d'encadrements

On peut ajouter deux encadrements de même sens, c'est-à-dire :
Soient a, b, c et d quatre réels,

si on a : $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right.$ alors on en déduit : $a + c \leqslant x + y \leqslant b + d$.

Propriété 7 : oppsé d'un encadrement

Soient a et b deux réels,

si on a : $a \leqslant x \leqslant b$ alors $-b \leqslant -x \leqslant -a$.

Remarque
Pour obtenir un encadrement de $x - y$ si on connait un encadrement de x et de y, il faut penser à écrire $x - y = x + (-y)$ et utiliser les propriétés 6 et 7.

Propriété 8 : produit de deux encadrements

Soient a, b, c et d quatre réels **positifs**,

si on a : $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right.$ alors on en déduit : $a \times c \leqslant x \times y \leqslant b \times d$..

Exemple 17

1. On sait que $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et que $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.
   En déduire un encadrement de $A = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$, $B = \sqrt{10}$, $C = (\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{5} + 3)$, $D = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.
2. Même question sachant que $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et que $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ avec les nombres $A = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$, $B = 3\sqrt{21}$, $C = (\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{7} + 4)$, $D = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{7}$.
3. On considère un disque de rayon 2 à 10^{-1} près.
   Déterminer un encadrement de son aire sachant que $3,1 < \pi < 3,2$.

5 Équations et inéquations de degré supérieur à 1

5.1 Division euclidienne de polynômes

Propriété 9 : division euclidienne

Soit P_1 et P_2 deux polynômes avec $P_2 \neq 0$.
Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que

- $P_1 = P_2 \times Q + R$
- $\deg(R) < \deg(P_2)$

Méthodes de détermination du quotient et du reste :

- Méthode 1 : Par identification
  Exemple :
  On veut écrire la division euclidienne de $6X^4 + X^3 - 2$ par $3X^2 + 1$
  Le degré du quotient sera égal à 4-2=2 : il existe donc a, b et c réels tels que $Q(X) = aX^2 + bX + c$.
  Le degré du reste sera inférieur ou égal à 1 : il existe donc d et e réels tels que $R(X) = dX + e$.
  On doit donc avoir $6X^4 + X^3 - 2 = (3X^2 + 1)(aX^2 + bX + c) + (dX + e)$
  Soit $6X^4 + X^3 - 2 =$
  $=$.
  Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
  On doit donc avoir : $\left\{\begin{array}{r} 3a = 6 \\ 3b = 1 \\ 3c + a = 0 \\ b + d = 0 \\ c + e = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$
  Donc $Q(x) =$ et $R(x) =$
  Ainsi $6X^4 + X^3 - 2 =$

- Méthode 2 : en posant la division
  Exemple :
  On veut écrire la division euclidienne de $X^3 + X^2 - 1$ par $X - 1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & & -1 & X \quad -1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 \quad +2X \quad +2 \\ \cline{1-2}
 & 2X^2 & & & \\
 & -2X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
 & & 2X & & \\
 & & -2X & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

Donc $X^3 + X^2 - 1 = (X-1)(X^2 + 2X + 2) + 1$

Attention à bien écrire les polynômes dans l'ordre décroissant des puissances !

Définition 16 : divisibilité d'un polynôme

Un polynôme P_1 est divisible par un polynôme P_2 non nul si le reste de la division euclidienne de P_1 par P_2 est nul.

Exemple 18
Déterminer les divisions euclidiennes du polynôme P_1 par le polynôme P_2 par les deux méthodes et dire si P_1 est divisible par P_2

1. $P_1 = 3X^3 - X^2 + 5X - 2$ et $P_2 = X - 1$
2. $P_1 = 4X^4 + 2X^3 - 7X$ et $P_2 = X^2$
3. $P_1 = X^5 - X^4 + 5X^3 + X^2 + 4X + 2$ et $P_2 = X^2 + 1$
4. $P_1 = X^4 - 3X^2 + 2$ et $P_2 = X + 2$

5.2 Factorisation des polynômes

Définition 17 : racine d'un polynôme

Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}$. Un réel a est dit racine de P si $P(a) = 0$.

Exemple 19
Dans chaque cas, montrer que le réel a est une racine du polynôme P.

1. $a = -3$ et $P = X^4 + X^3 - X^2 + 8X - 21$
2. $a = -1$ et $P = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$
3. $a = 1$ et $P = X^5 - 1$

Propriété 10 : factorisation par $X - a$

Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}$.
P est factorisable par $X - a$ si et seulement si a est une racine de P.

Exemple 20
Factoriser les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - 1$
2. $P_2(X) = X^3 - X^2 - X - 2$
3. $P_3(X) = 2X^3 - 13X^2 + 17X + 12$
4. $P_4(X) = X^3 + 3X^2 - 6X - 8$

5.3 Équations de degré supérieur à 1

Après avoir cherché une équation équivalente dont le second membre est nul, on cherche à factoriser le polynôme dans le premier membre.

Exemple 21
Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : 4x^2 - 1 + (2x-1)(3x+2) = (2x-1)(x-7)$
2. $(E_2) : (3x+2)(x-1) + 9x^2 - 4 = (2x-5)(3x+2)$
3. $(E_3) : (3x+1)^2 = 4(x-3)^2$
4. $(E_4) : 9(2x-1)^2 = 5(2x-1)(x+3)$
5. $(E_5) : (2x-1)(x+3)^2 = 2x-1$

Exemple 22

1. Résoudre l'équation $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$
2. En déduire la résolution des équations suivantes :
   a. $x^6 + 7x^4 - 21x^2 - 27 = 0$
   b. $x^9 + 7x^6 - 21x^3 - 27 = 0$
   c. $x\sqrt{x} + 7x - 21\sqrt{x} - 27 = 0$
   d. $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{21}{x} - 27 = 0$

5.4 Inéquations de degré supérieur à 1

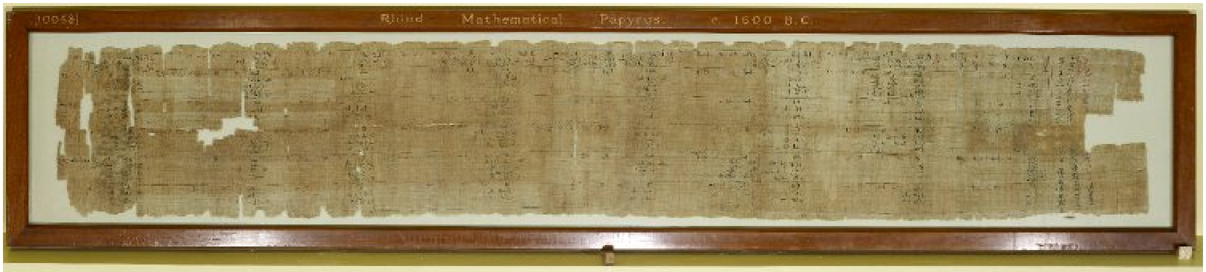
Après avoir cherché une inéquation équivalente dont le second membre est nul, on cherche à factoriser le polynôme dans le premier membre.

Exemple 23
Résoudre les inéquations suivantes

1. $(I_1) : (3x-1)(-2x+3) \leqslant 0$
2. $(I_2) : -2(x-1)(-1+2x) > 0$
3. $(I_3) : \dfrac{x}{-x-2} \leqslant 0$
4. $(I_4) : 3(x+1) - (x+1)(7x-4) \geqslant 0$
5. $(I_5) : x^2 - 2x + 1 < 4x^2 - 12x + 9$
6. $(I_6) : -2x^3 + 11x^2 - 17x + 6 < 0$
7. $(I_7) : \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1} \geqslant 0$
8. $(I_8) : x(3x-2) > 0.$
9. $(I_9) : -5(x-3)(7x+4) \leqslant 0.$
10. $(I_{10}) : \dfrac{-4x-4}{x+2} \geqslant 0.$
11. $(I_{11}) : (x+2)(-3x-4) + (4x-2)(x+2) < 0.$
12. $(I_{12})) : \dfrac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 - 2x + 1} \leqslant 0.$

Un peu d'histoire

L'algèbre est la branche des Mathématiques qui étudie les règles de calcul sur les nombres, la résolution d'équations, plus généralement les propriétés de structure des objets mathématiques. Le mot algèbre a une origine arabe, comme nous le verrons par la suite.
Depuis les premières civilisations (Babylone, Égypte), les hommes ont résolu des équations du premier degré et même quelques équations du second degré. Par exemple, on trouve dans le **Papyrus de Rhind** (rouleau de papyrus de 5 m de long sur 30 cm de large), le problème suivant :
Calcul d'une quantité à déterminer telle que si elle est traitée 2 fois avec elle-même, il en vient 9. Quelle est donc la quantité qui s'exprime ainsi ?



Papyrus de Rhind (1650 Avant JC)

Voici la solution du scribe **Ahmes** :
Tu dois faire en sorte de calculer le total de cette quantité avec sa deuxième (quantité). Le résultat est 3. Avec ces 3 tu dois trouver 9. Le résultat est 3 fois. Vois c'est 3 qui s'exprime ainsi. Tu trouveras cela correct
Voici une explication de ce texte :

si elle est traitée 2 fois avec elle-même, il en vient 9	$x+2x=9$
Tu dois faire en sorte de calculer le total de cette quantité	
avec sa deuxième (quantité). Le résultat est 3.	$x+2x=3x$
Avec ces 3 tu dois trouver 9.	$3x=9$
Le résultat est 3 fois.	$\frac{9}{3}=3$
Vois c'est 3 qui s'exprime ainsi.	$x=3$
Tu trouveras cela correct	Vérification avec le résultat. $3+2\times 3=9$

Voici un autre problème résolu par Ahmes :
Trouver un nombre qui ajouté à son septième donne 19.
Voici sa solution : *on divise* 19 *par* 8, *ce qui donne* $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. *On multiplie le tout par* $7=1+2+4$, *ce qui donne* $(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(9+\frac{1}{2})$, *soit* $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.
Cet algorithme donne la bonne solution puisque si $x+\frac{x}{7}=19$ alors $x=19\times\frac{7}{8}$.
On remarque donc que les Égyptiens ne résolvent pas en utilisant des symboles, ni pour écrire l'inconnue ni pour écrire les opérations effectuées. Ils donnent un algorithme de manière rhétorique sans jamais le justifier.

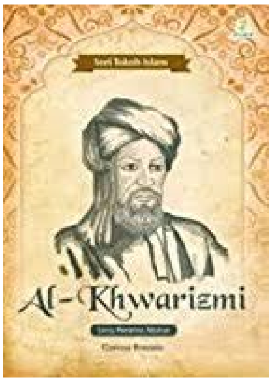
Les Grecs résolvaient les équations de manière géométrique. Ils n'ont apporté aucun développement significatif à la résolution des équations. On peut seulement remarquer que **Diophante**, mathématicien grec (III^e siècle) a le premier utilisé des abréviations mais son raisonnement est encore écrit en toutes lettres.

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Proposons que la somme des nombres soit $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20 unités), et que leur produit soit $\overset{\circ}{M}\ \overline{\text{ϙ}\text{ϛ}}$ (96 unités).
Que la différence des nombres soit $\text{ϛ}\ \overline{\beta}$ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou $\overset{\circ}{M}\ \overline{\iota}$ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire $\text{ϛ}\ \overline{\alpha}$ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20), et que leur différence est $\text{ϛ}\ \overline{\beta}$ (2x).

Extrait d'une traduction du livre "Les Arithmétiques" de Diophante.

La véritable naissance de l'algèbre a eu lieu grâce au mathématicien perse **Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi** (790-850).



Voici ce qu'affirme al Khwarizmi dans l'introduction de son ouvrage :
«[c'est un abrégé] englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux et qui sont relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects ».
Ainsi pour résoudre les équations, al-Khwarizmi désigne trois opérations :

– *al jabr* (le reboutement). C'est une technique qui consiste à enlever de l'équation un terme négatif en ajoutant son opposé des deux côtés de l'équation. comme par exemple $4x-3=5$ devient $4x=5+3$;
– *al muqabala* (la réduction). Les termes semblables sont réduits comme par exemple $4x=9+3x$ devient $x=9$;
– *al hatt.* Cette technique consiste à diviser chaque membre par un même nombre. Par exemple $2x=8$ devient $x=4$.

La démarche *al jabr* a donné naissance au mot *algèbre.*
L'algèbre de al Khwarizmi reste rhétorique sans symbolisme aucun, même pour les nombres. Il appelle « dirham » (monnaie de l'époque) un nombre simple, « chay » (chose) l'inconnue et « mal » le carré de l'inconnue. Tous les coefficients sont positifs et tous les termes s'additionnent.

Il a fallu plusieurs siècles pour que l'Occident s'approprie les travaux des savants arabes et développe à son tour les mathématiques. Le mathématicien français **François Viete** (1540-1603) a développé le calcul littéral. En 1591, il publie un ouvrage de 18 pages, "In artem ananyticam isagoge" qui représente une avancée considérable pour l'algèbre. Avec lui, le calcul littéral trouve ses bases dans le but de résoudre tout problème. Les grandeurs cherchées sont désignées par des voyelles et les grandeurs connues par des consonnes.
Les symboles d'opérations sont officialisés : +, -, une barre horizontale pour : et in pour le signe multiplié ; la multiplication par 2 est notée bis. Pour les parenthèses, il utilise des accolades. La notion d'équations y est longuement développée et une théorie sérieuse commence à se mettre en place.

Grâce à lui, les équations ne sont plus résolues de façon géométrique. Les identités remarquables, par exemple, reposant par le passé sur des concepts géométriques deviennent avec Viete des formules proprement dites.
Par exemple, Viete note l'équation $12+5x=20$ par $12+5\ in\ A\ aequatur$ 20.

Traduction en français de "In artem ananyticam isagoge".
Le personnage de gauche est Apollonius et celui de droite est Viete.

Il faut encore quelques décennies, voire siècles, pour que les notations se stabilisent :

=	Recorde (Anglais, 1510-1558) en 1557
$<$ et $>$	Thomas Harriot(anglais) en 1621
$+$ et $-$	(addition et soustraction) Widmann (Allemand, vers 1460)
$+$ et $-$	(signe d'un nombre) Oughtred (Anglais, 1574-1660) en 1631
Symboles de multiplication	
a x b	(croix de St-André pour la multiplication) Oughtred en 1631
$a.b$	(point pour la multiplication) Leibniz (Allemand, 1646-1716) en 1698
ab	au lieu de a x b Stifel (1486-1567) en 1544
x^n	(notation en exposant) René Descartes (Français, 1596-1650)
Symboles de division	
÷	Rahn (Allemand, 1622-1676) en 1659
:	Leibniz (Allemand, 1646-1716) en 1698
/	(trait oblique pour la division) De Morgan (Anglais, 1806-1871)
$\frac{a}{b}$	(fraction avec trait horizontal) Oresme (Français, 1325-1382)
Symboles de groupements	
(...)	parenthèses Tartaglia (1506-1557)
[...]	crochets Bombelli (1526-1573)
{...}	accolades Viète en 1593