Chapitre 4 : Vecteurs et géométrie repérée.

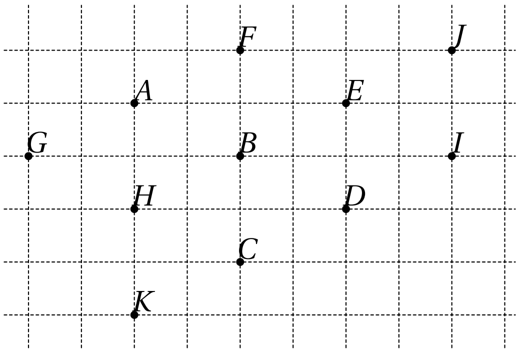
1 Premières définitions.

1.1 Vecteur, égalité de vecteurs.

Définition 1 : vecteur

Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur
On le note $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ où A est l'origine et B l'extrémité du vecteur.

Exemple 1
Répondre aux questions à l'aide des points de la figure ci-dessous.



1. Répondre aux questions à l'aide des points de la figure ci-dessous.
   a. Déterminer tous les vecteurs qui ont la même direction que $\overrightarrow{AB}$?
   b. Déterminer tous les vecteurs qui ont la même direction et le même sens que $\overrightarrow{AB}$?
   c. Déterminer tous les vecteurs qui ont la même longueur que $\overrightarrow{AB}$
2. Répondre aux mêmes questions à l'aide des points de la figure ci-dessous mais pour le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Définition 2 : vecteurs égaux

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, sens et longueur
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarques

- On dit aussi que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les **représentants** d'un même vecteur $\vec{u}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, etc. définissent le même vecteur que l'on appelle le vecteur nul. On note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.

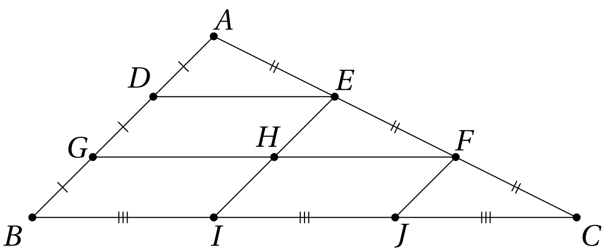
Propriété 1 : caractérisation du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si AB**DC** est un parallélogramme.

Exemple 2

1. On considère la figure codée suivante : les droites (DE), (GF) et (BC) d'une part et (AB), $EI)$ et (FJ) d'autre part sont parallèles.
   Avec les points de cette figure, écrire :
   a. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DG}$
   b. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DE}$
   c. tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FG}$



2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit I le symétrique de B par rapport à A et J le symétrique de D par rapport à C.
   Quelle est la nature du quadrilatère $IAJC$? Le démontrer.
3. On considère un triangle ABC. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$. D est le symétrique de C par rapport à I et E est le symétrique de B par rapport à J.
   Montrer que A est le milieu du segment $[DE]$.
4. On considère le parallélogramme $ABCD$.
   Construire ce parallélogramme en prenant soin de représenter un parallélogramme quelconque. Construire les points E, F, G et H tels que :
   $$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}\,;\ \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB}.$$

1.2 Vecteurs opposés. Vecteurs colinéaires.

Définition 3 : opposé d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On désigne par $-\vec{u}$ le vecteur qui a même longueur, même direction que $\vec{u}$, mais de sens opposé.

En particulier, si A et B sont deux points du plan, alors $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Définition 4 : vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et s'ils ont la même direction, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on dit aussi que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Définition 5 : produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On désigne par $k\vec{u}$ le vecteur :
- colinéaire à $\vec{u}$;
- si $k > 0$, de même sens que $\vec{u}$ et si $k < 0$ de sens opposé ;
- de longueur égale à k fois celle de $\vec{u}$ si $k > 0$ et de longueur égale à $-k$ fois celle de $\vec{u}$ si $k < 0$.

Propriété 2 : caractérisation des vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

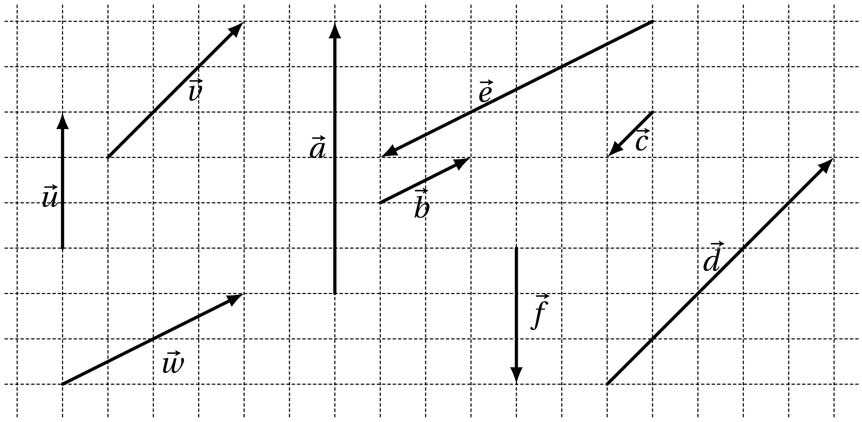
Remarques
- Étant donné un vecteur $\vec{u}$, on a bien $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur (il suffit de prendre $k = 0$).

Exemple 3

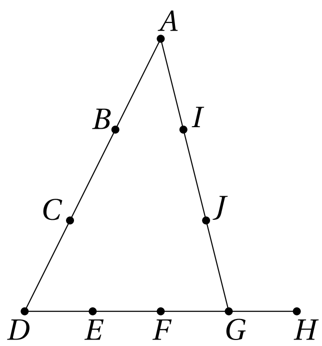
1. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Soit E le symétrique de A par rapport à B et F celui de A par rapport à D. Compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \dots\overrightarrow{CD}\,;\ \overrightarrow{BD} = \dots\overrightarrow{OD}\,;\ \overrightarrow{OB} = \dots\overrightarrow{EC} \text{ et } \overrightarrow{EF} = \dots\overrightarrow{OD}$$

2. Sur la figure ci-dessous, donner les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et écrire une égalité traduisant cette colinéarité.



3. Dans la figure ci-après, les graduations sur chaque segment sont régulières.



Par simple lecture graphique, compléter :

$$\overrightarrow{AD} = \dots\overrightarrow{BC}\,; \quad \overrightarrow{DC} = \dots\overrightarrow{AD}\,; \quad \overrightarrow{DF} = \dots\overrightarrow{DH}\,; \quad \overrightarrow{DF} = \dots\overrightarrow{DG}\,;$$
$$\overrightarrow{GF} = \dots\overrightarrow{DH}\,; \quad \overrightarrow{JA} = \dots\overrightarrow{JG}\,; \quad \overrightarrow{AG} = \dots\overrightarrow{GI}\,; \quad \overrightarrow{HD} = \dots\overrightarrow{DG}.$$

4. Reproduire la figure ci-dessous et placer :

   a. Le point E tel que $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{BA}$

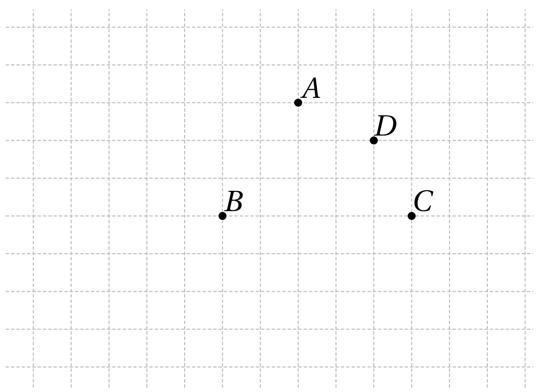
   b. Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

   c. Le point G tel que $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{DC}$

   d. Le point H tel que $\overrightarrow{BH} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

   e. Le point I tel que $2\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{BD}$.

   f. Le point J tel que $3\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{JA}$.



2 Somme de vecteurs.

Définition 6 : somme de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On note A, B et C des points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.
La somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On retiendra que pour construire la somme de deux vecteurs, on les place "bout à bout".
Autre façon de construire la somme de deux vecteurs :

On retiendra qu'on peut aussi construire la somme de deux vecteurs en confondant leurs origines et en construisant la diagonale de même origine du parallélogramme ainsi formé.

Propriété 3 : relation de Chasles

Soient A et B deux points du plan.
Alors quel que soit le point M du plan, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

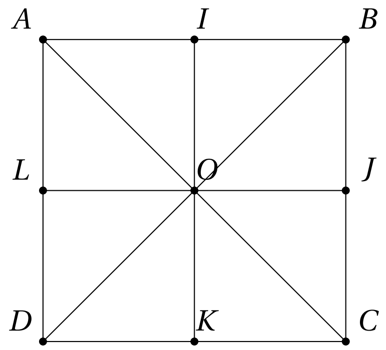
Définition 7 : différence de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La différence $\vec{u} - \vec{v}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Exemple 4

1. Écrire les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$ suivants en utilisant le moins de vecteurs possible sachant que :
   - **a.** $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$
   - **b.** $\vec{v} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$
   - **c.** $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
   - **d.** $\vec{x} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$
   - **e.** $\vec{y} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$
   - **f.** $\vec{z} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ED}$
2. En utilisant la figure ci-dessous, compléter les égalités.



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} =$ b) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA} =$ c) $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{IK} =$

d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} =$ e) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KJ} =$ f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL} =$

g) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} =$ h) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} =$ i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{IB} =$

j) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AL} =$ k) $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{KC} =$ l) $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{OC} =$

m) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{IJ} =$ n) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IJ} =$ o) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{OC} =$

p) $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{OL} =$ q) $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{IO} =$ r) $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{CL} =$

s) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{KJ} =$ t) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LD} =$ u) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{BC} =$

v) $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KL} =$ w) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OA} =$ x) $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{JO} =$

y) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{ID} =$ z) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{ID} =$

3. On considère la figure de la question précédente. Compléter les égalités.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{JB} =$ b) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{JO} =$ c) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{KL} =$

d) $\overrightarrow{LB} - \overrightarrow{DI} =$ e) $\overrightarrow{LJ} - \overrightarrow{OB} =$ f) $\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{CK} =$

g) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{AJ} =$ h) $\overrightarrow{JO} - \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{CO} =$

4. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Démontrer que pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Propriété 4 : caractérisation du milieu d'un segment

Soient deux points A et B du plan.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. I est le milieu de $[AB]$.
2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
3. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
4. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
5. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Propriété 5 : vecteurs et opérations

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k', on a :

1. $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
2. $(-1).\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$
3. $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
4. $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
5. $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
6. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Propriété 6 : caractérisation du centre de gravité

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.
Alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Réciproquement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, alors G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple 5
Construire les points B, D, F, H, J, M, Q, S et U vérifiant les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{w} - \vec{v}$

$\overrightarrow{EF} = 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

$\overrightarrow{GH} = -\vec{v} - 2\vec{w}$

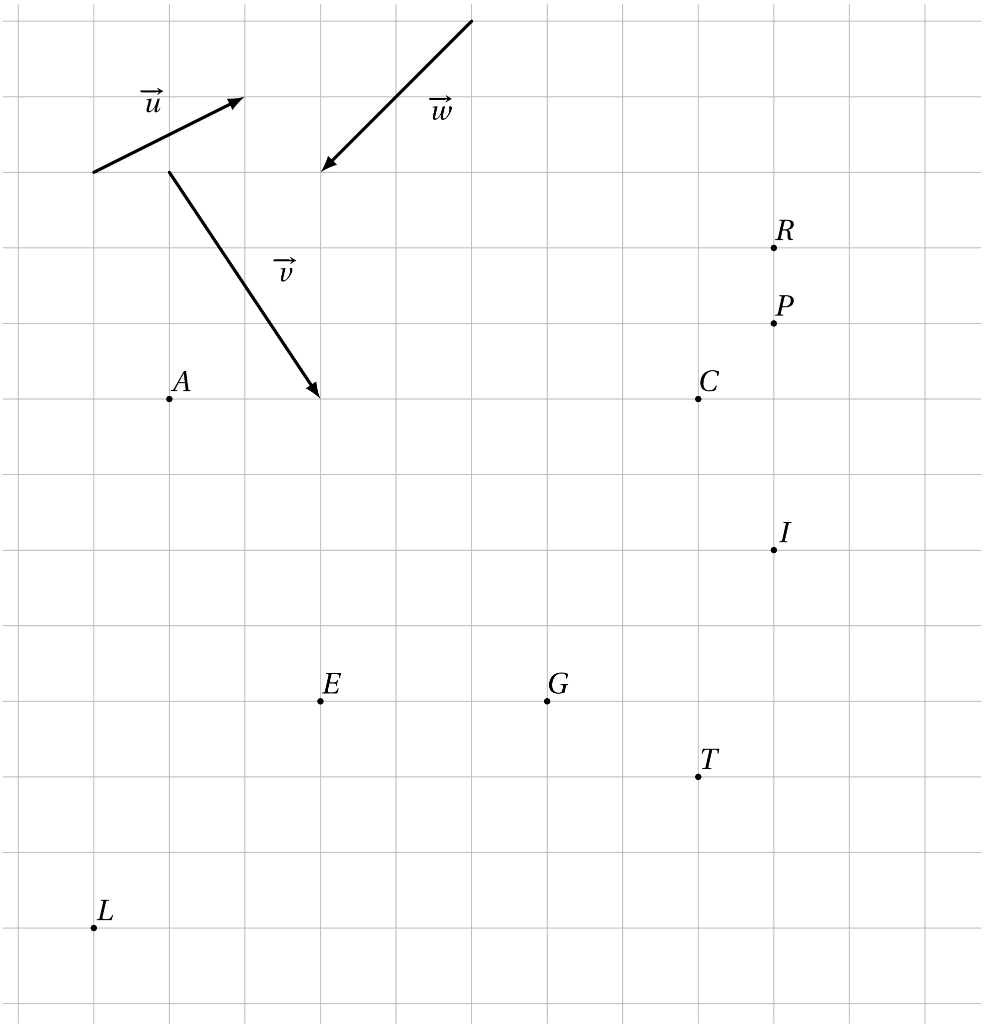
$\overrightarrow{IJ} = -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}$

$\overrightarrow{LM} = 3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

$\overrightarrow{PQ} = -3\vec{u} - 2\vec{w}$

$\overrightarrow{RS} = 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

$\overrightarrow{TU} = -2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$



2.1 Base de vecteurs.

Définition 8 : base du plan

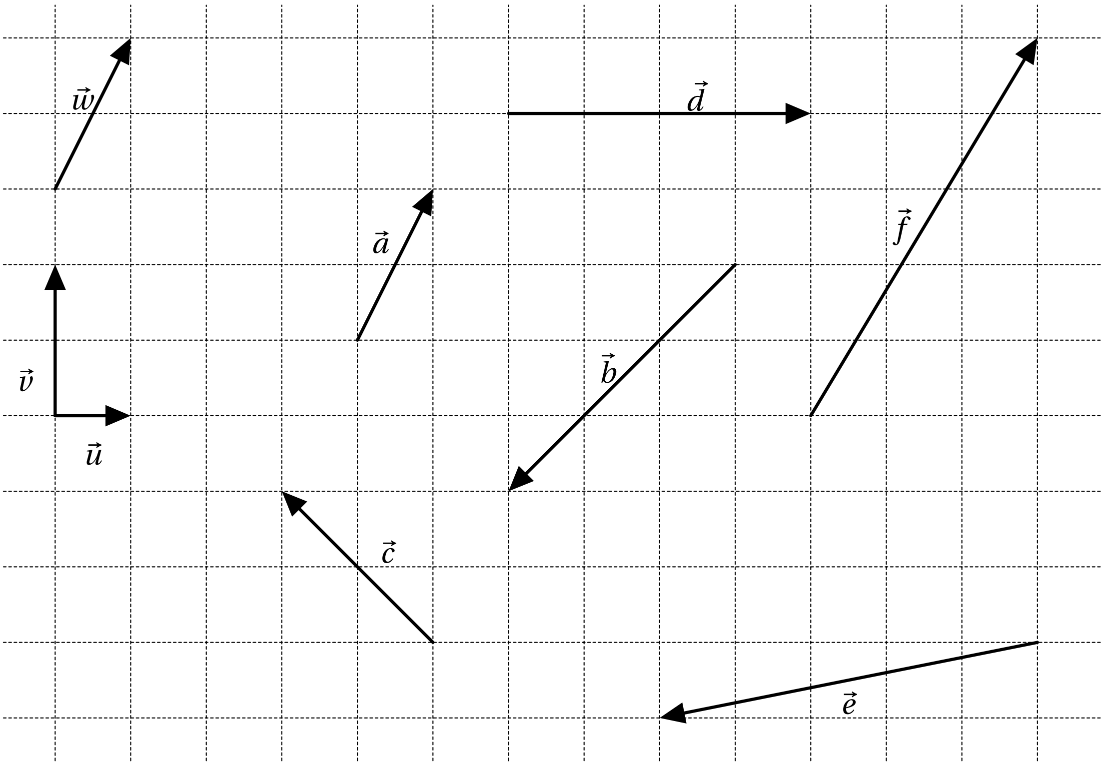
On appelle base du plan tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 7 : décomposition dans une base

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base du plan.
Alors tout vecteur $\vec{w}$ peut se décomposer de manière unique selon cette base .
C'est-à-dire qu'il existe un unique réel k et un unique réel k' tels que $\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$.

Exemple 6

1. Exprimer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ dans la base $(\vec{u};\vec{v})$ puis dans la base $(\vec{u};\vec{w})$.



2. Soit ABC un triangle non aplati.
   On définit les points E et E par : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et E le milieu de $[DC]$.
   Exprimer $\overrightarrow{AE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
3. Soit ABC un triangle quelconque, non aplati.
   Soit I le milieu de $[BC]$.
   Placer les points D, E et F tels que :
   - $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
   - $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{IB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
   - $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{IC}$

   Exprimer, dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AI}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
4. Dans un triangle ABC non aplati, on note D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, E le point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, I le milieu de $[DE]$.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

3 Coordonnées de vecteur, coordonnées de points.

Définition 9 : repère du plan

Un repère du plan est la donnée de trois points (O, I, J) non alignés.
O est l'origine du repère.
La droite graduée de repère (O, I) est l'axe des abscisses, la droite graduée de repère (O, J) est l'axe des ordonnées.
Lorsque les axes sont perpendiculaires, le repère est dit orthogonal.
Lorsque le repère (O, I, J) est orthogonal et que $OI = OJ$, le repère est dit orthonormé ou orthonormal.

Remarque : On pose généralement : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. On obtient ainsi le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition 10 : coordonnées de vecteurs

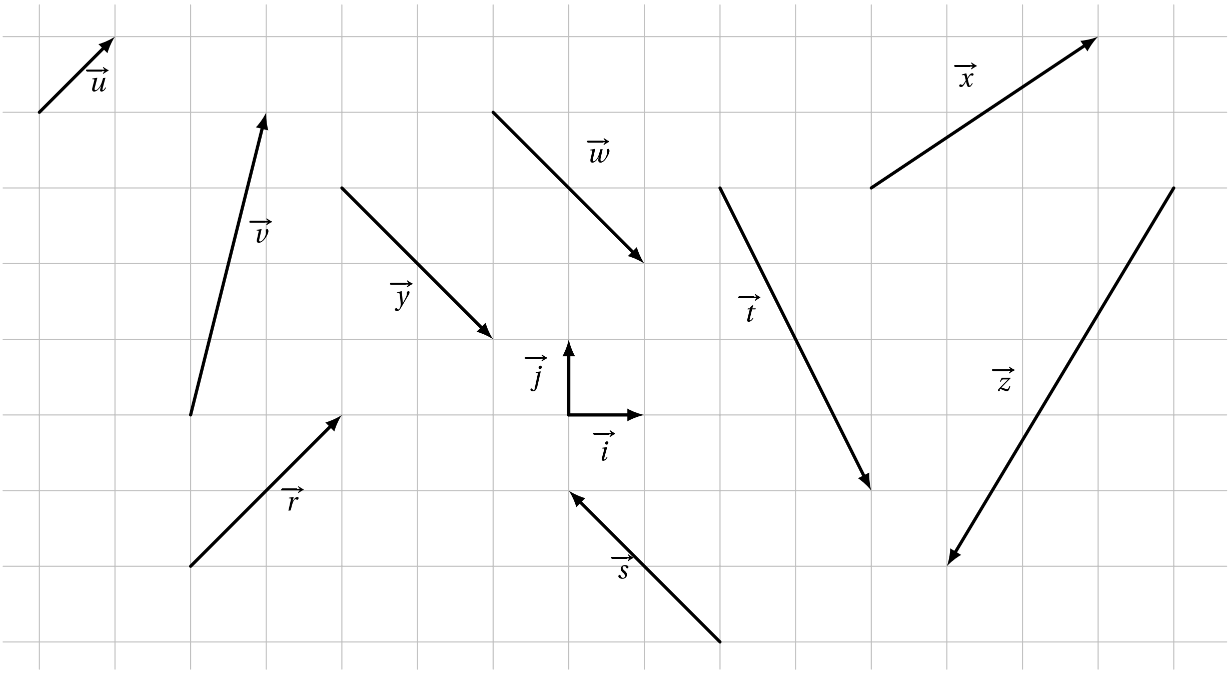
Pour tout vecteur $\vec{u}$, on sait qu'il existe un unique couple (x, y) de réels tels que

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

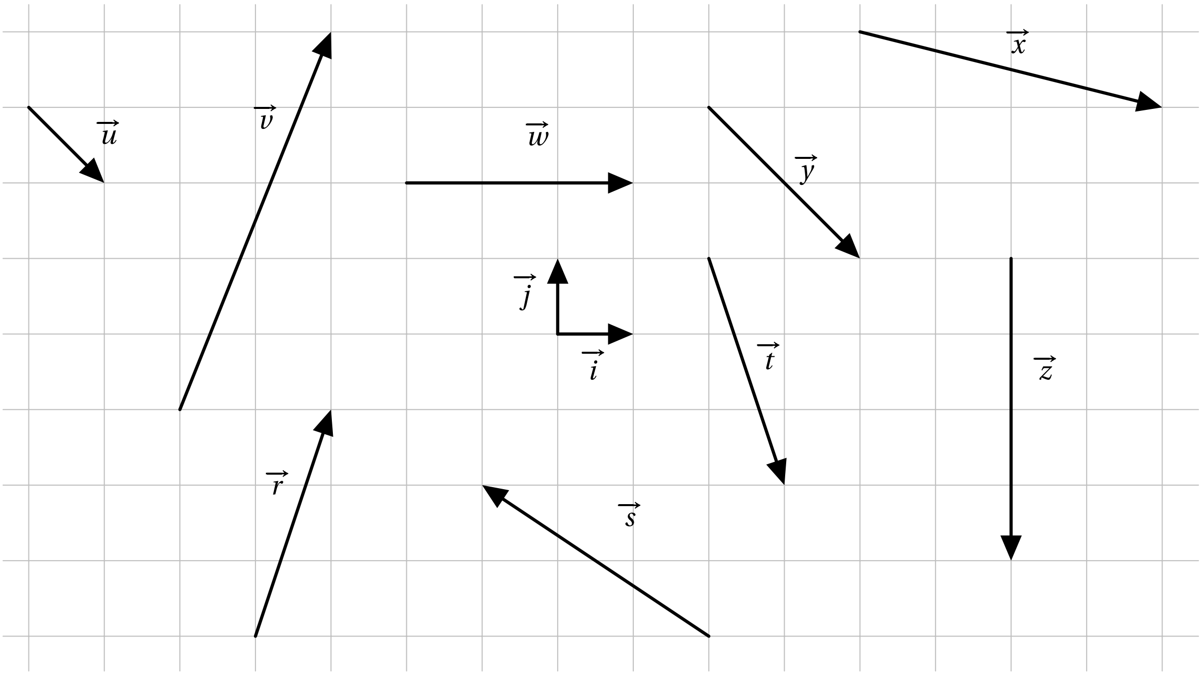
C'est la décomposition selon la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$.
On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,,\,y)$.

Exemple 7

1. Lire sur le graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$, $\vec{s}$ et $\vec{r}$.



2. Même question.



Définition 11 : coordonnées de points

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple $(x\ ;\ y)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\,.$$

On dit alors que M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.

Propriété 8 : vecteurs égaux et coordonnées

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Propriété 9 : somme, colinéarité et coordonnées

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan, $\overrightarrow{u}\,(x\ ,\ y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\ ,\ y')$ deux vecteurs du plan et k un réel quelconque.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\ ,\ y+y')$.
2. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx\ ,\ ky)$
3. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Propriété 10 : coordonnées de vecteurs

Soient A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A\right)$.
On note : $x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A \qquad y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A$.

Propriété 11 : coordonnées du milieu d'un segment

Soient A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$.
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
Autrement dit les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées des extrémités.

Exemple 8

1. Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ 1)$, $C(0\ ;\ -2)$ et $D(3\ ;\ 0)$.
   a. Placer les points dans le repère.
   b. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$.
   c. Construire les points :
      - E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$
      - F tel que $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
      - G tel que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

- H tel que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}$
- I tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
- J tel que $\overrightarrow{JA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$

d. Déterminer par le calcul les coordonnées des points E, F, G, H, I et J.

e. On note M, N, P et Q les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
Déterminer les coordonnées des points M, N, P et Q.

f. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$.
Que peut-on en déduire quant au quadrilatère $MNPQ$?

2. Dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(3\,;\,1)$, $B(-1\,;\,2)$, $C(-3\,;\,0)$ et $D(1\,;\,-1)$.

a. Placer les points dans le repère.

b. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$.

c. Construire les points :

- E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$
- F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$
- G tel que $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$
- H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$
- I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- J tel que $\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{AD}$

d. Déterminer par le calcul les coordonnées des points E, F, G, H, I et J.

e. On note M, N, P et Q les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
Déterminer les coordonnées des points M, N, P et Q.

f. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$.
Que peut-on en déduire quant au quadrilatère $MNPQ$?

Propriété 12 : longueur AB

Soient A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.
La distance de A à B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_A)^2}$$

.

Exemple 9

1. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\,;\,7), B(-3\,;\,1)$ et $C(1\,;\,-3)$.
   Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle. Est-il isocèle ?
2. Même question avec $A(0\,;\,5), B(3\,;\,6), C(5\,;\,-2)$.
3. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;\,3), B(3\,;\,\sqrt{5}), C(2\,;\,-3)$ et $D(-2\,;\,-\sqrt{5})$.
   Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
4. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;\,6), B(2\,;\,4), C(-2\,;\,-2)$ et $D(-5\,;\,0)$.
   Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

4 Vecteurs et géométrie

Propriété 13 : points alignés et vecteurs colinéaires

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple 10

1. Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soient les points $A(-1\,;\,1)$, $B(-\frac{5}{2}\,;\,0)$ et $C(2\,;\,3)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Soit OAB un triangle. C et D sont les points définis par : $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$
   Montrer que les points O, B et D sont alignés.
3. ABC est un triangle et on définit les points M, N et P par :
   $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}$.
   Montrer que les points M, N et P sont alignés. (on exprimera les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).
4. ABD est un triangle. On définit les points C, E et F par : $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ et E est le milieu de $[DF]$.
   Montrer que les points B, E et C sont alignés. (on exprimera les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$).

Propriété 14 : droites parallèles et colinéarité

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 11

1. ABC est un triangle. On définit les points M et N par $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
   Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
2. ABC est un triangle. On définit les points I et J par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.
   Démontrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.
3. On considère les points $A(-1\,;\,3), B(7\,;\,-1), C(4\,;\,2)$ et $D(0\,;\,4)$.
   Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
4. Même question avec les points $A(-4\,;\,1), B(-1\,;\,-1), C(1\,;\,3)$ et $D(-5\,;\,7)$.
5. On considère les points $A(-2\,;\,1), B(2\,;\,-2), C(5\,;\,-2)$ et $D(10\,;\,-6)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exemple 12
Soient les points $A(2\,;\,3), B(-1\,;\,0), C(4\,;\,1)$, $D(6\,;\,2)$ et $E(4\,;\,4)$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Démontrer que $ACDE$ est un parallélogramme.
2. Soient les points F et G définis par : $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
   Calculer les coordonnées des points F et G.
3. Démontrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
4. Démontrer que les points B, G et D sont alignés.
5. Les points A, F et D sont-ils alignés ? On justifiera avec soin la réponse.

Un peu d'histoire

La notion de vecteur a au-moins quatre origines. La première vient de la notion de force, la deuxième résulte de la représentation des nombres complexes, la troisième, développée par Leibniz provient de l'algébrisation de la géométrie et enfin la dernière découle des notions de vitesse et d'accélération initiées par Newton.
Étymologiquement, le mot vecteur vient du latin "*vector*" qui signifie "passager" et de "*vehere*" qui signifie "transporter". Il faut préciser, de plus, que le terme de "*vecteur*" est un terme polysémique. En effet, en cherchant dans le dictionnaire Larousse, plusieurs définitions du mot "vecteur" apparaissent :

– Tout véhicule aéronautique capable de transporter une arme en vue de la lancer sur un objectif.
– Tout être vivant capable de transmettre de façon active (en étant lui-même infecté) ou passive un agent infectieux (bactérie, virus, parasite).
– Molécule d'A.D.N. susceptible de recevoir un fragment d'A.D.N. étranger, dont elle facilite l'introduction, la multiplication et/ou l'expression dans une cellule.
– Ce qui sert de support à la transmission des informations, d'un message, etc. : Les principaux vecteurs de la presse.
– En informatique, ensemble de données d'un même type présentées sous la forme d'une suite de mots de mémoire tous séparés par le même incrément, en vue de leur traitement par un ordinateur.
– Élément d'un espace vectoriel.

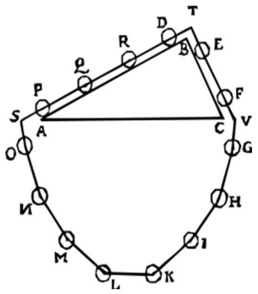
Le premier scientifique à dégager la notion de force est **Archimède** (287 à 212 avant JC). Il énonça le principe suivant : "*Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci, une poussée exercée du bas vers le haut, et égale, en intensité, au poids du liquide déplacé*". On peut reconnaître avec nos connaissances du XXIe siècle l'utilisation de vecteur. Mais Archimède n'a défini aucune opération sur ces « vecteurs ».

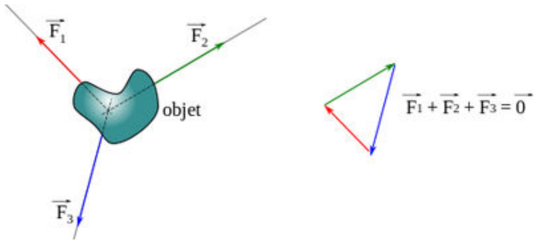
Archimède dans son bain

Gravure d'Archimède

Simon Stevin (1548-1620), mathématicien flamand, reprend les travaux d'Archimède. Dans son traité *De Beghinschen der Weeghconst* (Les Principes de la pesée), il examine la théorie du levier, établit les théorèmes relatifs au plan incliné et discute la détermination des centres de gravité des objets. Sa découverte majeure, décrite dans cet ouvrage, est le théorème dit du triangle des forces, qu'il démontre à partir d'un montage expérimental à l'aide de sphères.

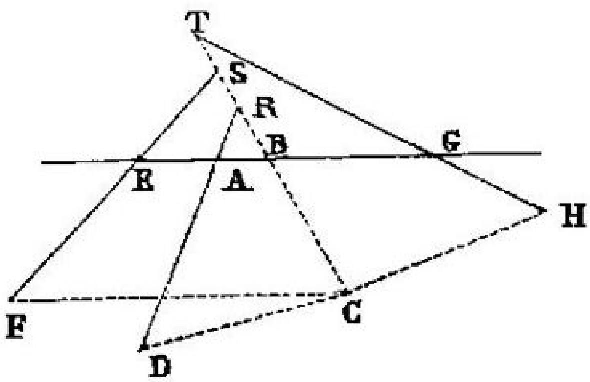
Simon Stevin
Geometry, Physics and Trigonometry
• in the book "The Principal works of Simon Stevin. He talked about the condition for the balance of forces on inclided planes, by using ingenious and intuitive diagram.





En 1687, **Pierre Varignon**, mathématicien français, publia un Projet de nouvelle mécanique sur les propriétés des poids suspendus à des cordes, où il énonce la règle de composition des forces par le parallélogramme (l'équivalent de la règle du parallélogramme pour la somme vectorielle).

L'introduction des coordonnées cartésiennes est faite dans le livre premier de la géométrie de **René Descartes** comme outil permettant de résoudre un problème ancien (le problème de Pappus, géomètre grec). Il montre en fait dans ce livre (1637), comment résoudre un problème géométrique par un calcul algébrique, participant à la naissance de la géométrie analytique.
« *Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T. (...)* »



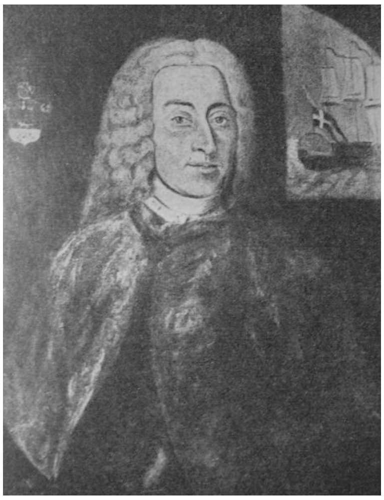
Extrait du livre premier de Géométrie

Gottfried Wilhem Leibniz, mathématicien et philosophe allemand (1646-1716) tente en vain de créer un calcul purement géométrique, c'est ce qu'il exprime en 1679 dans l'annexe de son livre *Géométrie des Situations* :
« *J'ay trouvé quelques éléments d'une nouvelle caractéristique, tout à fait différente de l'Algèbre, et qui aura des grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figure, tout ce qui dépend de l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles, et le mouvement, d'où vient, qu'il est souvent difficile de réduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des démonstrations et des constructions géométriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algèbre est tout fait. Mais cette nouvelle caractéristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes déterminées.* »

L'analyse géométrique de Leibniz est fondée sur une relation de congruence entre n-uplets de points de l'espace : deux bipoints sont congrus si leurs deux points sont à égale distance, deux triplets de points sont congrus si les triangles qu'ils forment sont superposables, etc. ce qui manque clairement à l'approche de Leibniz, c'est l'idée de direction.

Leibniz 1646-1716

Ce n'est que plus de cent ans plus tard, avec les travaux indépendants de **Caspar Wessel**, mathématicien norvégien (1745-1818), de **Jean-Robert Argand**, mathématicien suisse (1768-1822) et **Carl-Friederich Gauss**, mathématicien allemand (1777-1855), qu'un premier pas sera franchi avec l'interprétation géométrique des quantités imaginaires. Dans ces travaux, l'addition de vecteurs apparaît nettement, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un réel.

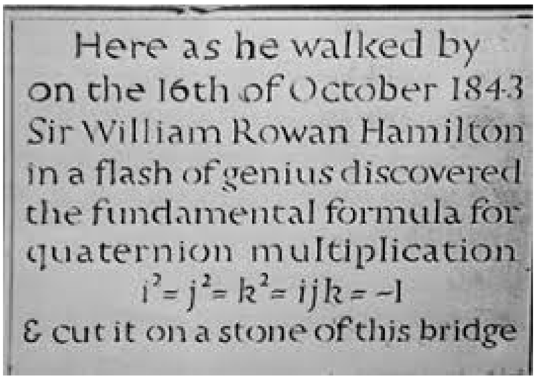


Caspar Wessel

Jean-Robert Argand

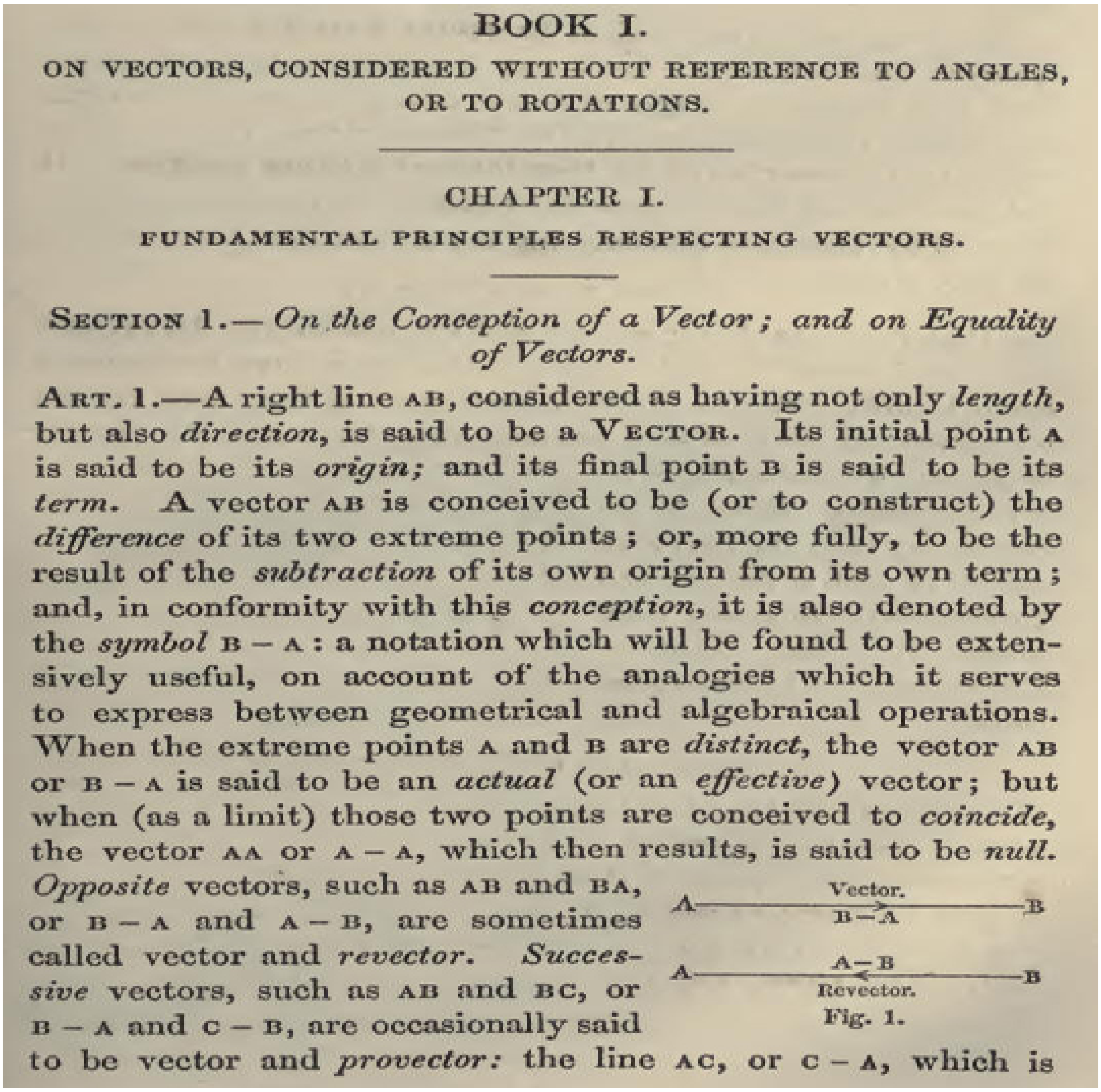
Carl-Friderich Gauus

Caspar Wessel fut aussi le premier à montrer comment « additionner » deux segments :
« *On les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se termine ; on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue ; ce nouveau segment s'appelle alors la somme des segments donnés.* »
Ces mathématiciens essayèrent de prolonger ces idées à l'espace mais se heurtèrent à une difficulté insurmontable. C'est **William Rowan Hamilton**, mathématicien irlandais (1805-18656) qui y parviendra en créant les quaternions en 1843. Ce sont des nombres de la forme $w + ix + jy + kz$ où $w, x, yetz$ sont des nombres réels et i, j et k des « quantités » qui obéissent aux lois : $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.



Plaque commémorative de la naissance des quaternions sur le pont de Broom (Dublin). « *Ici, le 16 octobre 1843, alors qu'il se promenait, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamentale sur la multiplication des quaternions* $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ *et la grava sur une pierre du pont.* »

Avec cette découverte, Hamilton définit clairement la notion de vecteur :



BOOK I.

ON VECTORS, CONSIDERED WITHOUT REFERENCE TO ANGLES, OR TO ROTATIONS.

CHAPTER I.

FUNDAMENTAL PRINCIPLES RESPECTING VECTORS.

SECTION 1.— *On the Conception of a Vector; and on Equality of Vectors.*

ART. 1.—A right line AB, considered as having not only *length*, but also *direction*, is said to be a VECTOR. Its initial point A is said to be its *origin;* and its final point B is said to be its *term.* A vector AB is conceived to be (or to construct) the *difference* of its two extreme points; or, more fully, to be the result of the *subtraction* of its own origin from its own term; and, in conformity with this *conception*, it is also denoted by the *symbol* B − A: a notation which will be found to be extensively useful, on account of the analogies which it serves to express between geometrical and algebraical operations. When the extreme points A and B are *distinct*, the vector AB or B − A is said to be an *actual* (or an *effective*) vector; but when (as a limit) those two points are conceived to *coincide*, the vector AA or A − A, which then results, is said to be *null.* *Opposite* vectors, such as AB and BA, or B − A and A − B, are sometimes called vector and *revector.* *Successive* vectors, such as AB and BC, or B − A and C − B, are occasionally said to be vector and *provector:* the line AC, or C − A, which is

$A \xrightarrow[B-A]{\text{Vector.}} B$

$A \xleftarrow[\text{Revector.}]{A-B} B$

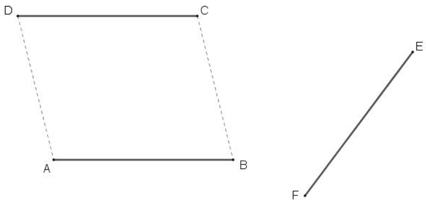
Fig. 1.

Elements of quaternions - Volume 1 - 1899

Mais la notation $\overrightarrow{AB}$ avec une flèche n'est pas encore née, à l'époque d'Hamilton, on notait un vecteur en gras **AB**.

Dans son ouvrage de 1854 « Exposition de la méthode des équipollences», **Giusto Bellavitis**, mathématicien italien (1803-1880) travaille sur les bipoints. Pour exprimer que AB et BA n'ont pas le même sens, il écrit : $AB = -BA$. Ensuite, il définit l'équipollence :
« *Pour qu'une droite puisse être substituée à une autre, il ne suffit pas qu'elle soit égale (c'est-à-dire d'égale grandeur), il faut en outre que ces deux droites soient parallèles et dirigées dans le même sens. Deux droites qui ont de telles relations sont dites équipollentes. Dans le calcul des équipollences, on peut toujours substituer à une droite une autre qui lui soit équipollente. Ainsi la droite AB est équipollente à DC, et est seulement égale à EF, ce qu'on distingue au moyen de deux signes différents, en écrivant $AB \ \Omega \ DC$ et gr.AB =gr.EF.* »

Giusto Bellavitis



Équipollence de bipoints

Il énonce aussi ce qui s'appellera plus tard la relation de Chasles : $AB + BC = AC$.

Le mathématicien allemand **Hermann Grassmann** (1809-1877) inventa d'autres calculs avec les vecteurs : le produit scalaire et le produit vectoriel. Grâce à tous ces développements, des physiciens comme **James Maxwell** (1831- 1879) et plus tard **Williard Gibbs** (1839-1903, américain) et **Oliver Heaviside** (1850-1925, britannique) utilisèrent ce nouveau calcul vectoriel notamment dans le domaine de l'électromagnétisme, de l'astronomie et de la cristallographie.