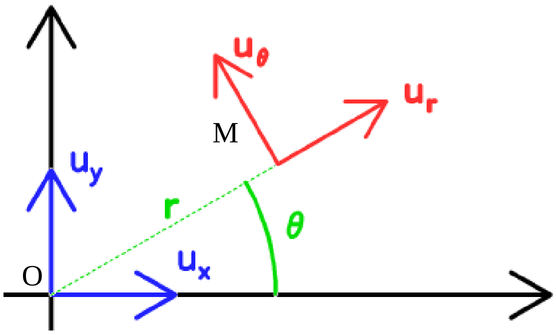
3TSI – AP du 23/01/20 : Révisions de mécanique 1
Mouvement circulaire d'un pendule simple

Rappel sur les coordonnées polaires :



Coordonnées du plan: r = $\|\overrightarrow{OM}\|$ et θ = (Ox,$\overrightarrow{OM}$)

Expression du vecteur $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$

Dérivation vectorielle : $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

Mouvement circulaire : r(t) = R et $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$

Exercice 1 Variante groupe CCP : Le pendule du professeur Tournesol

Le pendule du Professeur tournesol est constitué d'une petite boule de masse m = 100 g attachée à un fil inextensible de longueur ℓ= 10 cm. On étudie le mouvement du pendule qui, à t = 0, est lâché sans vitesse initiale d'une position repérée par l'abscisse angulaire θ_0 = 10°.

1) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer un système de 2 équations différentielles satisfaites par l'abscisse angulaire θ(t).

L'abscisse angulaire maximale du mouvement étant de l'ordre de 10°, on peut considérer que le mouvement est confiné aux petits angles.

2) La loi d'isochronisme des oscillations aux petits angles stipule que la période du mouvement T_0 est indépendante de l'amplitude des oscillations : donner l'expression de la période dans ces conditions.
3) Déduire la solution θ(t) de l'équation différentielle qui satisfait aux conditions initiales. A quelles dates le pendule est-il vertical ?

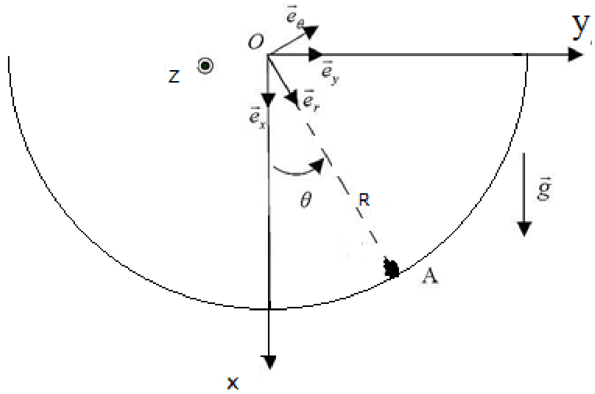
Exercice 1 Variante groupe Centrale : peser la Terre avec un pendule

Eh oui ! Avec un simple pendule dont on évalue la période au moyen d'une montre, on peut remonter à la valeur de l'intensité du champ de pesanteur g puis à celle de la masse de la Terre, connaissant la constante de gravitation universelle, G = $6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ et le rayon de la Terre R_T = $6{,}4.10^3$ km

Le pendule qui bat la seconde à Paris a une longueur L = 24,8 cm. En déduire la masse de la Terre, en expliquant votre démarche.

Exercice 2 Une bille dans un bol

On étudie le mouvement d'une bille (assimilé à un point matériel A) de masse m = 20 g lâchée sans vitesse initiale dans un bol hémisphérique de rayon R. Les frottements sont négligés. On donne g = 9,81 m.s^{-2}.



1) Faire un bilan des forces subies par la bille et exprimer ces forces dans le repère (on notera F l'intensité de la réaction du bol)
2) Exprimer la position , la vitesse et l'accélération dans le repère .
3) Par projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$, établir une équation différentielle du mouvement. Que devient cette équation pour des petites oscillations ? Estimer numériquement la période T_0 des petites oscillations.

On ajoute à cette étude des frottements fluides du type $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$ avec r = 1,5cm rayon de la bille et η viscosité de l'air.

4) Rappeler la valeur de la viscosité de l'air et en déduire la valeur du coefficient de frottement h telle que $\vec{F} = -h\vec{v}$.
5) Quelle est la nouvelle équation différentielle du mouvement ?
6) Déterminer la durée approximative du mouvement.

Corrigé

Exercice 1 Variante groupe CCP : Le pendule du professeur Tournesol

1) PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ (cas sans frottement) avec $\vec{a} = \left(-\ell\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (\ell\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$
   Et $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{P} = mgcos\theta\overrightarrow{u_r} - mgsin\theta\overrightarrow{u_\theta}$
   Projection sur $\overrightarrow{u_r}$: $-m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mgcos\theta$
   Projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$: $m\ell\ddot{\theta} = -mgsin\theta$
2) Aux petits angles : $m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$
3) Solution $\theta(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)$ et $\dot{\theta}(t) = -\omega_0.A.\sin(\omega_0.t) + B\omega_0.\cos(\omega_0.t)$
   Conditions initiales : $\theta(t=0) = \theta_0 = A$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0 = B\omega_0$ donc $B = 0$
   Donc $\theta(t) = \theta_0.\cos(\omega_0.t)$
   Le pendule est vertical quand $\theta(t) = 0$ donc $\omega_0.t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc $t = \frac{T_0}{4} + k\frac{T_0}{2}$

Exercice 1 Variante groupe Centrale : peser la Terre avec un pendule

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ (cas sans frottement) avec $\vec{a} = \left(-\ell\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (\ell\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

Et $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{P} = mgcos\theta\overrightarrow{u_r} - mgsin\theta\overrightarrow{u_\theta}$

Projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$: $m\ell\ddot{\theta} = -mgsin\theta$

Aux petits angles : $m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

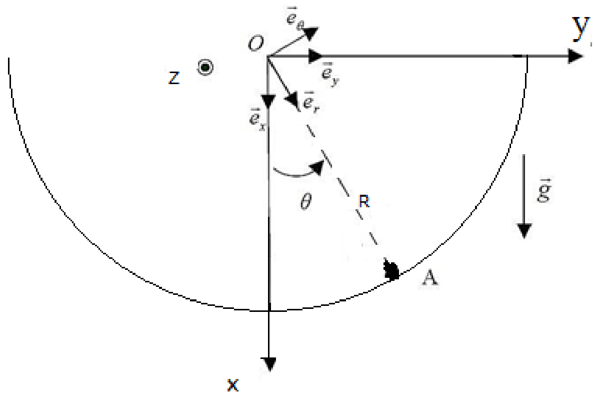
Dans un deuxième temps on relie g à la masse de la Terre grâce à la force de gravitation :

$\vec{P} = \overrightarrow{F_G}(r = R_T)$ donc $mg = G\frac{mM_T}{R_T^2}$ donc $g = G\frac{M_T}{R_T^2}$

Ainsi $M_T = \frac{gR_T^2}{G} = \frac{\ell 4\pi^2 R_T^2}{GT_0^2} = 6{,}0.10^{24}$ kg

Exercice 2 Une bille dans un bol

On étudie le mouvement d'une bille (assimilé à un point matériel A) lâchée sans vitesse initiale dans un bol hémisphérique de rayon R. Les frottements sont négligés. On donne g = 9,81 m.s^{-2}.



1) Bilan des forces : poids $\vec{P} = mgcos\theta\overrightarrow{e_r} - mgsin\theta\overrightarrow{e_\theta}$ et réaction du bol $\vec{F} = -F\overrightarrow{e_r}$
2) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \left(-R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (R\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

3) Projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $mR\ddot{\theta} = -mgsin\theta$

Aux petits angles : $m\mathrm{R}\ddot{\theta} = -mg\theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\mathrm{R}}\theta = 0$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\mathrm{R/g}}$ = 0,6 s avec R = 8 cm

On ajoute à cette étude des frottements fluides du type $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ avec R rayon de la bille et η viscosité de l'air.

4) Viscosité de l'air $\eta = 2.10^{-5}$ PI donc h = $6\pi\eta R$ = $5,7.10^{-6}$ kg.s^{-1}.
5) On ajoute au bilan des forces : $\vec{F} = -h\vec{v} = -hR\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ donc $mR\ddot{\theta} = -mgsin\theta - hR\dot{\theta}$

6) Equation caractéristique : $x^2 + \frac{h}{m}x + \frac{g}{R} = 0$ avec $\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{g}{R} < 0$ (car faible amortissement)

   Solutions : $-\frac{h}{2m} \pm j\frac{\sqrt{\frac{4g}{R} - \frac{h}{m}}}{2}$

   Solution temporelle : $\theta(t) = e^{-\frac{ht}{2m}}.\left(Acos\left(\frac{\sqrt{\frac{4g}{R} - \frac{h}{m}}}{2}t\right) + Bsin\left(\frac{\sqrt{\frac{4g}{R} - \frac{h}{m}}}{2}t\right)\right)$

   On pose $\frac{h}{2m} = \frac{1}{\tau}$ donc le régime transitoire dure environ 3τ (ou 5.τ ça ne change pas grand-chose !)

   $3\tau = \frac{6m}{h} = 2,1.10^4$ s : ce résultat énorme est surtout issu d'un problème de modélisation. On n' a pas du tout modélisé les frottements de la bille sur le bol qui sont la principale source de dissipation d'énergie…