Compléments de mécanique – Solide en rotation

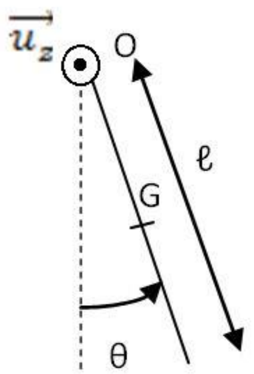
Vu en cours de SII :

Pour un solide S en translation rectiligne, $\vec{F} = m\overrightarrow{a_G}$ avec $\vec{F}$ résultante des forces (en N)
2^e^ loi de Newton — $\overrightarrow{a_G}$ accélération du centre d'inertie dans le référentiel R galiléen

Pour un solide S en rotation autour de l'axe (Oz), $\Gamma = J.\frac{d\omega}{dt}$ avec Γ couple total (en N.m)
Loi du moment cinétique ($L_{Oz} = J.\omega$) — J moment d'inertie par rapport à (Oz) (kg.m²), ω vitesse angulaire (rad.s^{-1})

Exemple 1 : Pendule pesant avec frottements

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur ℓ en pivot parfait autour de l'axe (Oz). Sa position est repérée par l'angle θ. Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) vaut J_{Oz}. Son centre d'inertie est noté G. Les frottements sont négligeables dans un premier temps.



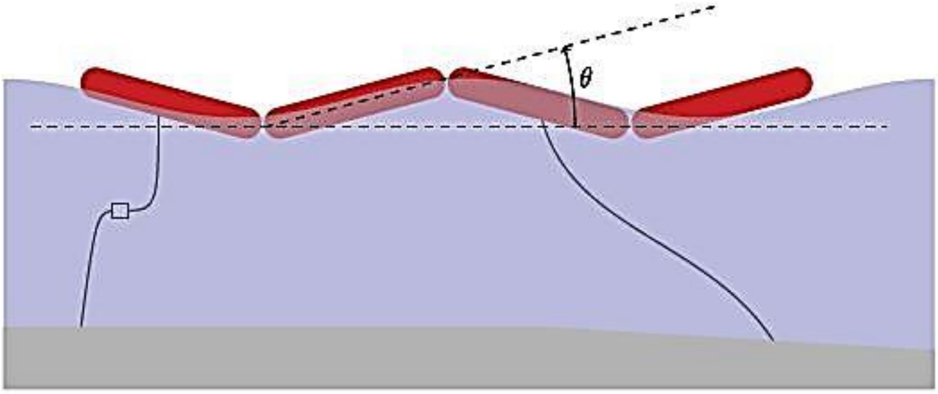
1) Exprimer le moment par rapport à (Oz) des actions mécaniques appliquées au système : poids et liaison pivot.
2) En appliquant la loi du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle du 2^e ordre satisfaite par θ(t).
3) Déterminer l'expression de la période des oscillations de faible amplitude en fonction des paramètres pertinents du problème. Application numérique : m = 2,0 kg, ℓ = 1,0 m, g = 9,8 m.s^{-2}, J_{Oz} = 0,67 kg.m².

En réalité, l'acquisition des oscillations de ce pendule montre qu'un régime pseudo-périodique se met en place. On modélise les frottements par une action mécanique résistante de moment par rapport à Oz : $M_{Oz,\ frott} = -\lambda.\dot{\theta}$ avec λ coefficient positif constant

4) Etablir l'équation différentielle satisfaite par θ(t) en considérant les frottements.
5) Quelle condition a-t-on sur λ pour obtenir un régime pseudo-périodique ?

Exemple 2 (Oral Centrale assez ancien) : Régime forcé d'un pelamis

Un Pelamis® est un dispositif constitué de flotteurs cylindriques couplés à des génératrices, fixé sur le fond marin, prélevant l'énergie de la houle.



On note θ l'angle entre un flotteur et l'horizontale. Il subit de la part de ses voisins deux couples. Un couple de rappel élastique $-C\theta$ et un couple résistant $-\beta\dot{\theta}$ qui entraine une génératrice. Sur chaque flotteur s'exerce de plus un couple moteur dû à la houle : $\Gamma_0 \cos \omega t$. On note J le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son centre que l'on supposera fixe.

1. Déterminer l'équation du mouvement pour un flotteur ayant deux voisins.

2. En déduire l'expression de $\theta(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

3. En déduire l'expression de la puissance moyenne fournie à la génératrice.

4. Γ_0, J et ω étant fixés, déterminer les valeurs de C et β qui maximisent cette puissance. On utilisera éventuellement un logiciel de calcul formel. Commenter.

5. Définir l'efficacité et le rendement d'un tel dispositif. Discuter.

Retour sur les bilans énergétiques :

Dans tous les cas (avec ou sans frottement),dans un référentiel galiléen :

- Loi de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\vec{F})$
  (la variation de l'énergie cinétique est la somme des travaux de toutes les forces)
  → sert à obtenir une vitesse à un stade donné du mouvement
- Loi de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P$
  (la dérivée de l'énergie cinétique est la somme des puissances de toutes les actions mécaniques)
  → sert à obtenir l'équation différentielle du mouvement

Solide en translation	Solide en rotation par rapport à (Oz)
$E_c = \frac{1}{2} mv^2$	$E_c = \frac{1}{2} J\omega^2$
$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$	$P_{couple} = C\omega$

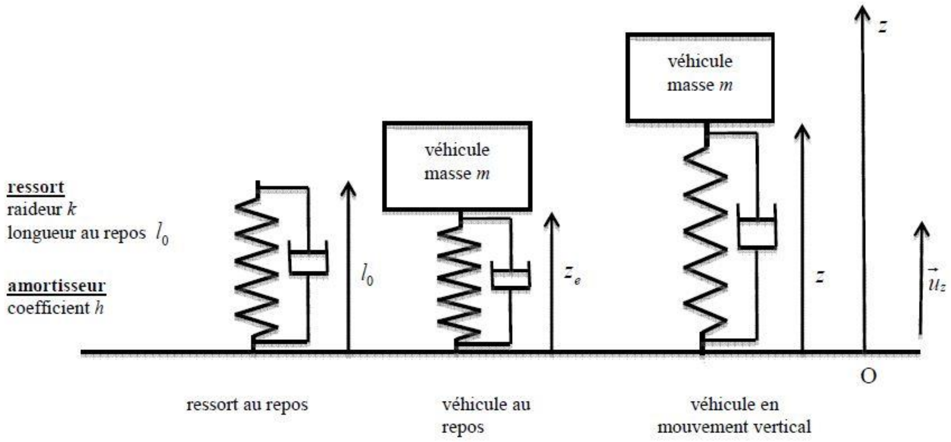
En l'absence de frottement, il y a conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = 0$ ou $\frac{dE_m}{dt} = 0$

On peut généraliser même dans les cas non conservatifs : $\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{nc}})$ ou $\frac{dE_m}{dt} = P(\overrightarrow{F_{nc}})$

(les variations de l'énergie mécaniques sont dues aux forces NON conservatives = NON associées à une énergie potentielle)

Exemple 3 : Rappels énergétiques sur un cas sans rotation : Mouvement vertical d'une voiture amorti par sa suspension

Le véhicule est assimilé à une masse m. La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, ainsi que d'un dispositif amortisseur qui exercice sur le véhicule une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse **verticale** de la caisse.



Suite à une impulsion soudaine ($v(t=0) = v_0 > 0$), le véhicule initialement immobile acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On cherche à établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement par une méthode énergétique.

1) a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
   b) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique. Les énergies potentielles seront exprimées en fonction de z et à une constante additive près.
2) Exprimer l'énergie mécanique totale du système.
3) Déterminer l'expression de la puissance P de la force de frottements fluides.
4) En déduire l'équation différentielle en z caractéristique du mouvement.

Problème de bilan : CC-INP 2019 Mécanique de la marche à pied (SANS CALCULATRICE)

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_0 et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(0, \overrightarrow{e_x})$ fixe dans le référentiel d'étude. $(0, \overrightarrow{e_x})$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure 2).

La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(0, \overrightarrow{e_x})$ est noté J.

On néglige tout frottement.

On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. Γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH).

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ et supposée uniforme.

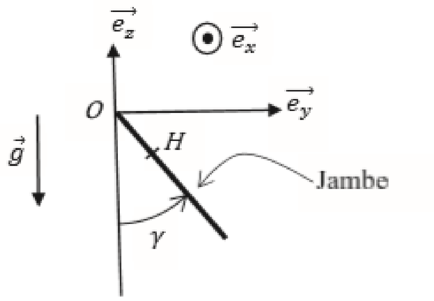


Figure 2 - Jambe et repère cartésien

1) Donner l'expression du moment cinétique scalaire L_{Ox} de la jambe par rapport à l'axe $(0, \overrightarrow{e_x})$ en fonction de γ et J.
2) Quel est le moment par rapport à l'axe $(0, \overrightarrow{e_x})$ de l'action mécanique de la liaison pivot en O. Justifier.
3) Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du moment du poids par rapport à $(0, \overrightarrow{e_x})$ en fonction de g, m_0, d' et γ.
4) Etablir l'équation différentielle vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite établir cette équation par une méthode énergétique.

5) Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

L'énergie potentielle de pesanteur de la jambe s'écrit : $E_p = -m_0.g.d'\cos(\gamma)$ + constante.

6) Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.
7) En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

8) En se plaçant dans l'approximation des petits oscillations, montrer que la période propre T d'oscillations de la jambe est :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}$$

9) Le moment d'inertie de la jambe est de la forme $J = k.m_0.d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendant de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.
10) Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?
11) A l'aide d'une description simple d'un pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.