P10 - Conduction thermique - Complément

Déperditions dans un circuit de chauffage central

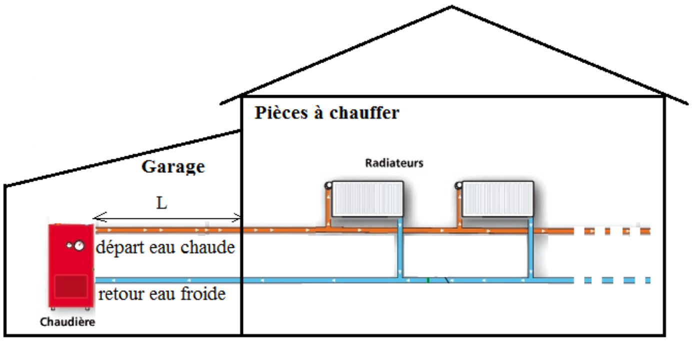
Données

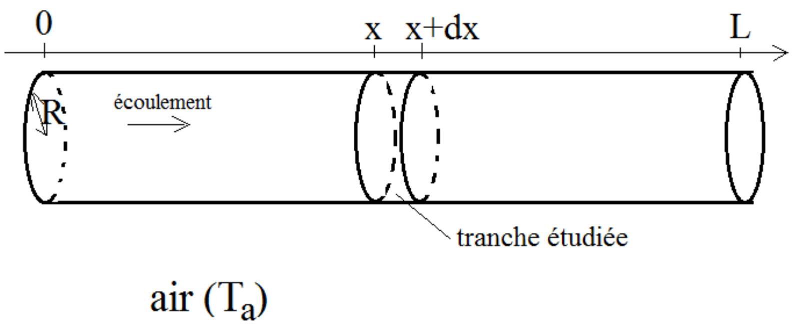
- loi de Newton pour le transfert conducto-convectif : $\Phi_{solide \rightarrow fluide} = hS(T_{solide} - T_{fluide})$

  S : surface de contact entre le solide et le fluide

  $\Phi_{solide \rightarrow fluide}$: flux thermique (en W) orienté du solide vers le fluide
- coefficient d'échange conducto-convectif (solide/fluide) de l'air : $h_{air} = 10$ W.m^{-2}.K^{-1}
- capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4{,}2$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}

On étudie le cas d'une maison équipée d'une chaudière située dans un garage (température ambiante $T_a = 10$ °C). L'eau chaude sort de la chaudière à la température $T_0 = 70$°C, puis s'écoule avec un débit constant $D_m = 50$ kg.h^{-1} à travers une canalisation en cuivre de longueur L = 5,0 m et de rayon R = 20 mm, avant de pénétrer dans les pièces à chauffer. On cherche à estimer les déperditions thermiques le long de cette canalisation, au contact de l'air du garage.





On étudie une tranche élémentaire située entre les abscisses x et x+dx, avec les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est stationnaire
- la température de l'eau ne dépend que de la coordonnée x : T = T(x)
- en tout point de la conduite, la paroi en cuivre est à la température T(x) de l'eau
- seul le transfert thermique conducto-convectif entre le cuivre et l'air est à prendre en compte

1. Exprimer le flux thermique élémentaire $\delta\Phi$ reçu par la tranche étudiée de la part de l'air extérieur (on exprimera $\delta\Phi$ en fonction de T(x), T_a, h_{air}, R et dx).

2. Quelle est la relation entre $\delta\Phi$, le débit massique D_m de l'écoulement et le transfert thermique massique élémentaire δq reçu par l'eau qui s'écoule dans cette tranche ?

3. En appliquant le premier principe industriel (sous forme élémentaire) entre l'entrée et la sortie de cette tranche, montrer que la température vérifie l'équation suivante : $\frac{dT}{dx} + \frac{1}{l_c} T(x) = \frac{1}{l_c} T_a$ où l'on exprimera l_c en fonction des données du problème. Calculer numériquement l_c.

4. Déterminer l'expression de T(x) et calculer numériquement la température T(L) à l'extrémité de la canalisation. En déduire la puissance totale P_{pertes} perdue le long de cette canalisation. Quelle(s) solution(s) peut-on proposer pour réduire ces pertes ?

Corrigé

Déperditions dans un circuit de chauffage central

1. La puissance $\delta\Phi$ reçue par la tranche correspond au flux thermique conducto-convectif, orienté de l'air vers le cuivre (contact thermique solide/fluide). En tenant compte de cette orientation, la loi de Newton donne $\delta\Phi=-h.dS.(T_{solide}-T_{fluide})=-h_{air}(2\pi R.dx)(T(x)-T_a)$ où $dS = 2\pi R.dx$ est la surface (élémentaire) <u>en contact avec l'air</u> (surface latérale du cylindre de rayon R et hauteur dx).

Finalement $\delta\Phi=-2\pi R h_{air}(T(x)-T_a)dx$

2. On écrit usuellement $P_{th}=D_m q$ où P_{th} est la puissance thermique reçue par le système, ici $\delta\Phi=D_m\delta q$

3. $dh=h_s-h_e=\delta q$ (pas de variation d'énergie cinétique, canalisation horizontale, pas de pièces mobiles)
$h_s-h_e=c_{eau}(T_s-T_e)=c_{eau}(T(x+dx)-T(x))=c_{eau}dT$ (entrée en x, sortie en x+dx)

$dT=T(x+dx)-T(x)$ est la variation élémentaire de température associée à la variation dx de la position

$$\delta q=\frac{\delta\Phi}{D_m}=-\frac{2\pi R h_{air}(T(x)-T_a)dx}{D_m}$$

On obtient la relation $c_{eau}dT=\dfrac{-2\pi R h_{air}(T(x)-T_a)dx}{D_m}$

On peut donc réécrire sous la forme $\dfrac{dT}{dx}+\dfrac{2\pi R h_{air}}{D_m c_{eau}}T(x)=\dfrac{2\pi R h_{air}}{D_m c_{eau}}T_a$, donc $l_c=\dfrac{D_m c_{eau}}{2\pi R h_{air}}$

Avec D_m en $kg.s^{-1}$ c_{eau} en $J.K^{-1}.kg^{-1}$ R en m h_{air} en $W.m^{-2}.K^{-1}$ on a $l_c =$ 46 m.

4. Solution générale sans second membre : $K e^{-\frac{x}{l_c}}$ Solution particulière avec second membre : T_a

Solution générale de l'équation différentielle : $T(x)=K e^{-\frac{x}{l_c}}+T_a$

Condition aux limites : en x= 0 $T_0=K+T_a$ donc $K=T_0-T_a$. Finalement $T(x)=(T_0-T_a)e^{-\frac{x}{l_c}}+T_a$

On obtient numériquement T(L) = 63,8 °C

Application du premier principe industriel entre l'entrée et la sortie de la canalisation :

$c_{eau}(T(L)-T_0)=\dfrac{-P_{pertes}}{D_m}$ donc $P_{pertes}=-D_m c_{eau}(T(L)-T_0)\simeq 360\,W$

Cette perte n'est pas négligeable (on peut la comparer à la puissance d'un convecteur ("radiateur"), de l'ordre de 1000 W). Il faudrait calorifuger la canalisation en l'entourant d'un matériau isolant (cette isolation est généralement réalisée avec des manchons en mousse élastomère, ou un bourrelet de coton recouvert d'une bande plâtrée).