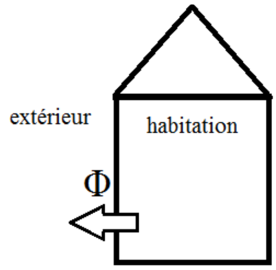
P10 - Conduction thermique - TD

Application directe du cours

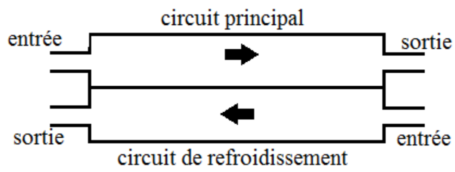
Exercice 1 Signe, orientation et signification du flux thermique



1) Quel est le signe du flux thermique Φ sortant à travers les parois de l'habitation :

- lors d'une chaude journée d'été ?

- lors d'une froide journée d'hiver ?



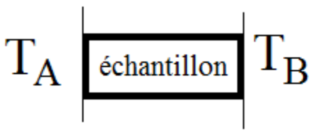
Dans l'échangeur à contre-courant schématisé ci-contre, la vapeur d'eau issue de la turbine d'une centrale thermique (circuit principal) se condense au contact de l'eau du circuit de refroidissement (les flèches indiquent le sens de l'écoulement).

2) Indiquer sur le schéma le flux thermique Φ échangé entre les deux fluides à travers la paroi interne de l'échangeur, en l'orientant afin qu'il soit positif.

3) En supposant qu'il n'y a pas d'autre transfert thermique, quelle est la relation entre Φ, le débit massique D_{mr} du circuit de refroidissement et le transfert thermique q_r reçu par l'eau de ce circuit dans l'échangeur ? En appliquant le premier principe industriel, écrire la relation entre l'élévation de température ΔT de l'eau de refroidissement, sa capacité thermique massique c, le débit D_{mr} et le flux thermique Φ.

Exercice 2 Résistances thermiques

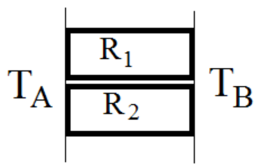
Sur un banc d'essai, on met successivement deux échantillons en contact avec des thermostats de températures T_A = 40 °C et T_B = 20 °C. Pour chaque échantillon, on attend que le régime permanent soit établi.



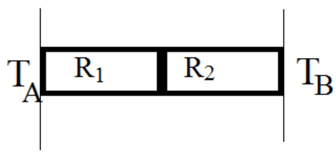
1) Préciser l'orientation à choisir pour Φ afin que sa valeur soit positive.

2) L'échantillon n°1 présente une résistance thermique $R_1 = 5\ K.W^{-1}$. Calculer le flux thermique Φ_1 qui le traverse.

3) L'échantillon n°2 est traversé par un flux $\Phi_2 = 10$ W. Calculer sa résistance thermique R_2.



On associe ensuite les deux échantillons comme sur le schéma ci-contre.
4) Exprimer la résistance thermique équivalente R'. En déduire le flux total Φ' qui traverse l'ensemble.



On envisage une autre association des deux échantillons (schéma ci-contre).
5) Exprimer la résistance thermique équivalente R'' et calculer le flux thermique Φ'' .

Exercice 3 Interprétation d'une donnée technique

On trouve l'indication suivante dans un catalogue : "laine de verre ép. 100 mm, R = 3 K/W pour 1 m^2 d'isolant".

1) Déduire de cette donnée la conductivité thermique λ de cette laine de verre.

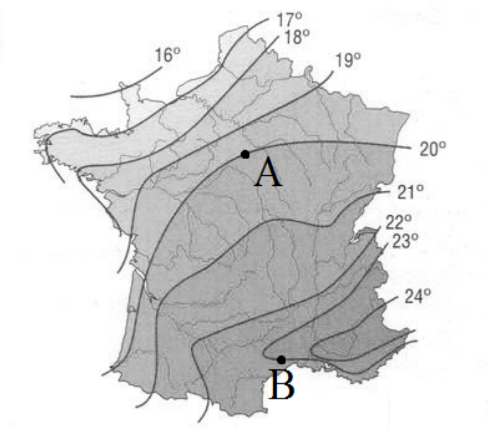
2) Pour une différence de température de 25°C entre les deux faces de la laine de verre, quelle sera la valeur du flux thermique traversant...

a) 1 m^2 de laine de verre d'épaisseur 300 mm ?

b) 20 m^2 de laine de verre d'épaisseur 100 mm ?

Exercice 4 Opérateur gradient

On a représenté sur la carte des isothermes. Représenter la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,T$ au point A, puis au point B.

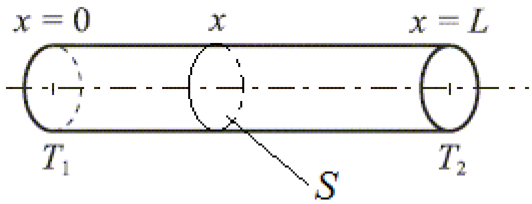


Exercice 5 Utilisation de la loi de Fourier

Une barre métallique de section constante S = 5,0 cm^2 et de longueur L = 10 cm est placée en contact avec deux milieux de températures différentes T_1 = -5 °C et T_2 = 40 °C. On néglige les transferts thermiques à travers sa surface latérale.

On donne la conductivité thermique du métal étudié : λ = 400 W.m^{-1}.K^{-1}

Le régime permanent est atteint, on admet que la température présente une évolution affine : $T(x) = a\,x + b$



1) En utilisant les conditions aux limites (x=0 et x = L), exprimer les coefficients a et b en fonction de T_1, T_2 et L.

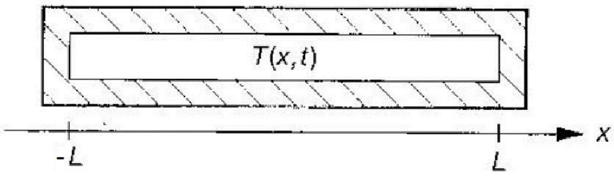
2) A partir de la loi de Fourier, exprimer le vecteur $\vec{j}_Q$ (on fera intervenir le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ de l'axe Ox). Commenter l'orientation de $\vec{j}_Q$ et calculer numériquement le flux thermique surfacique $\varphi = \|\vec{j}_Q\|$.

3) Exprimer puis calculer numériquement le flux thermique Φ qui traverse la section S représentée sur le schéma.

4) Exprimer la résistance thermique R_{th} de la barre en fonction de λ, S et L. Application numérique.

Exercice 6 Régime transitoire

Pour une barre initialement chauffée à l'une de ses extrémités puis entièrement calorifugée, on obtient l'expression suivante pour les variations de température : $T(x,t)=T_0+\theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$



1) Représenter l'allure du profil de température initial (évolution de T en fonction de x à t = 0). Représenter sur le même graphe le profil de température pour t >> τ.

2) Exprimer $\vec{j_Q}(x,t)$ pour une abscisse x et un instant t quelconque. Le flux thermique est-il conservé le long de la barre ? Quelle est sa valeur aux deux extrémités de la barre ?

Exercice 7 Solutions (?) de l'équation de la chaleur

Les expressions suivantes peuvent-elles être des solutions de l'équation de la diffusion thermique ?

a) $T_1(x,t)=T_0+\theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

b) $T_2(x,t)=T_0+\theta_0 \cos(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda})$

c) $T_3(x,t)=T_0+\theta_0 \cos(\omega t)$

d) $T_4(x,t)=T_0-\beta x$

Exercice 8 Le souffleur de verre

Un souffleur de verre tient l'extrémité d'une barre d'acier dans sa main. Il plonge l'autre extrémité dans un four à haute température.

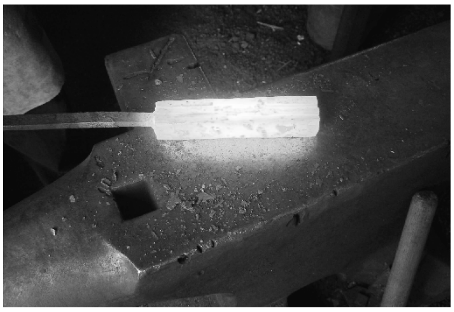
Pour cet acier : $\lambda = 40\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $c = 500\ J.K^{-1}.kg^{-1}$, $\mu = 7800\ kg.m^{-3}$

1) Calculer le coefficient de diffusion thermique α de l'acier.
2) Evaluer l'ordre de grandeur de la durée τ_c caractéristique de la diffusion thermique :
   a) si la barre mesure 10 cm
   b) si la barre mesure 1 m

On envisage de remplacer la barre en acier par une barre en cuivre.
Données pour le cuivre : $\lambda' = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $c' = 382\ J.K^{-1}.kg^{-1}$, $\mu' = 8930\ kg.m^{-3}$
3) Pour une longueur L donnée, calculer le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$ entre les temps caractéristiques de diffusion thermique pour le cuivre et l'acier. Quel matériau est préférable du point de vue du souffleur de verre ?

<u>Exercice 9</u> Refroidissement d'un lingot de forge

Tous les procédés de forgeage (artisanaux et industriels) partent d'un lingot de métal porté à haute température, qui est ensuite déformé pour obtenir l'objet souhaité. On cherche ici à estimer la durée de refroidissement du lingot lorsqu'il est plongé dans l'air à température ambiante.



Le lingot est initialement à la température T_0 = 800 °C. On étudie son refroidissement en contact avec l'air ambiant. On s'intéresse principalement au transfert à l'interface acier/air, et on suppose la température T(t) uniforme à l'intérieur du lingot. L'air ambiant au voisinage du lingot est à T_a = 20 °C.

<u>Données</u>

Dimensions du lingot : 10 cm x 10 cm x 50 cm
S = 1700 cm^2 : aire de l'interface acier/air (surface du lingot en contact avec l'air)
h = 10 $W.m^{-2}.K^{-1}$ pour le contact avec l'air (coefficient d'échange conducto-convectif)
Pour l'acier étudié : c = 500 $J.K^{-1}.kg^{-1}$, $\mu = 8{,}0.10^3$ $kg.m^{-3}$, λ = 100 $W.m^{-1}.K^{-1}$

1) Calculer la masse m et la capacité thermique C du lingot.
2) Exprimer le flux thermique Φ(t) à l'interface acier/air en fonction de h, S, T(t) et T_a. Exprimer puis calculer numériquement la résistance thermique R associée au contact acier/air.
3) En appliquant le premier principe thermodynamique au lingot sur une durée élémentaire dt, établir l'équation différentielle pour la température T(t) sous la forme $\frac{dT}{dt}+\frac{1}{\tau}T(t)=\frac{1}{\tau}T_a$, en exprimant τ en fonction de R et C.
4) Résoudre l'équation différentielle et représenter graphiquement l'allure de T(t). Application numérique : calculer τ.
5) Calculer τ lorsque le lingot est plongé dans l'eau (h = 500 $W.m^{-2}.K^{-1}$ pour le contact avec l'eau)

On cherche maintenant à vérifier si l'hypothèse de température uniforme à l'intérieur du lingot est raisonnable.
6) Calculer le coefficient de diffusion thermique α de l'acier. En déduire l'ordre de grandeur du temps caractéristique τ_{diff} de la diffusion thermique à l'intérieur du lingot. Conclusion ?

Travaux dirigés

Exercice 10 Double vitrage

Pour déterminer la résistance thermique d'une fenêtre en double vitrage, on adopte un modèle en trois couches :

- une première couche de verre, d'épaisseur e_1 = 4 mm
- une couche intermédiaire d'air, d'épaisseur e_2 = 12 mm
- une seconde couche de verre, d'épaisseur e_3 = 4 mm

On note T_{ext} = 0 °C et T_{int} = 20 °C les températures extérieures et intérieures.

Dimensions du vitrage étudié : L = 80 cm, H = 1,0 m
Conductivités thermiques Air (sec, dans les CNTP) : 0,0262 $W.m^{-1}.K^{-1}$
Bois (chêne) : 0,16 $W.m^{-1}.K^{-1}$
Verre : 1,0 $W.m^{-1}.K^{-1}$

1) Exprimer puis calculer numériquement les résistances thermiques R_1, R_2 et R_3 des différentes couches. En déduire la résistance thermique globale du vitrage.

2) Calculer le flux thermique à travers le vitrage en régime permanent (préciser l'orientation choisie).

On souhaite tenir compte des pertes à travers le reste de la fenêtre. On considère que les bordures, montants... de la fenêtre sont constitués de bois plein ; ils présentent une surface totale de 0,30 m^2 et une épaisseur de 50 mm.

3) Calculer la résistance thermique globale de la fenêtre. En déduire le flux thermique qui la traverse.

4) On souhaite tenir compte du transfert conducto-convectif avec l'air (h = 10 $W.m^{-2}.K^{-1}$) ; calculer la résistance thermique associée au contact avec l'air. Est-il utile de prendre en compte ce phénomène ?

Exercice 11 La dinde (Oral Centrale)

L'an dernier, la dinde de Noël pesait 2,5 kg et était bien cuite au bout de 1h30. Cette année, la dinde pèse 3,5 kg.

1) Rappeler l'équation de la diffusion thermique. Quelle est la relation liant les ordres de grandeur du temps et de la longueur caractéristique d'un phénomène de diffusion ?

2) En supposant la dinde de forme sphérique et $\mu_{dinde} \sim \mu_{eau}$, évaluer les rayons R_1 et R_2 des deux dindes.

3) Etablir une relation entre R_1 , R_2 et les durées caractéristiques τ_1 et τ_2 de diffusion thermique associées. Quel sera le temps de cuisson de la dinde cette année ?
Indication on peut considérer que la dinde est cuite lorsque la diffusion thermique atteint son centre

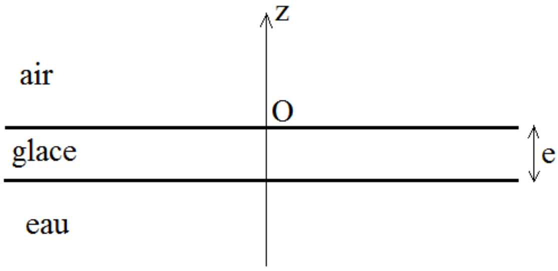
Exercice 12 Le gâteau

Après avoir réalisé un gâteau au yaourt pour 6 personnes, parfaitement cuit en 35 minutes et très apprécié, Madame Michu souhaiterait passer à la vitesse supérieure. Elle conserve les proportions de sa recette et utilise le même moule, mais elle augmente les quantités afin de satisfaire 10 personnes. Quel temps de cuisson lui conseillez-vous ?

Exercice 13 Le lac gelé

On étudie l'évolution d'une couche de glace à la surface d'un lac lors d'une froide journée d'hiver. L'air est à la température T_{air} = - 10 °C, l'eau liquide située sous la couche de glace est à T_{eau} = 0°C.

Dans la couche de glace d'épaisseur e, on note T(z) la température : T(0) est la température de la glace au contact de l'air, T(-e) au contact de l'eau. On suppose le régime permanent atteint et on note Φ le flux thermique qui traverse la couche de glace.



Données
- S = 1000 m^2 (surface du lac) — e = 10 cm (épaisseur de la couche de glace)
- λ_{glace} = 2,2 $W.m^{-1}.K^{-1}$ (conductivité thermique de la glace)
- h_{air} = 10 $W.m^{-2}.K^{-1}$ (coefficient d'échange conducto-convectif à l'interface air/glace)
- h_{eau} = 500 $W.m^{-2}.K^{-1}$ (coefficient d'échange conducto-convectif à l'interface eau/glace)
- ℓ_{sol} = - 333 $kJ.kg^{-1}$ (enthalpie massique de solidification de l'eau)
- d_{glace} = 0,9 (densité de la glace) — μ_{eau} = $1{,}0.10^3$ $kg.m^{-3}$ (masse volumique de l'eau)

1) Quelle hypothèse effectuée dans l'énoncé permet d'affirmer que le flux thermique Φ est le même à travers l'interface eau/glace, à travers l'interface glace/air et à travers la couche de glace ?

2) Comment faut-il orienter le flux thermique Φ dans cette situation pour que sa valeur soit positive ? L'épaisseur de la couche de glace aura-t-elle tendance à augmenter ou diminuer au cours du temps ?

3) Exprimer le flux Φ à l'interface eau/glace en fonction de h_{eau}, S, T_{eau} et T(-e). Calculer la résistance thermique R_{cc1} équivalente à cette interface.

4) Exprimer le flux Φ à l'interface glace/air en fonction de h_{air}, S, T_{air} et T(0). Calculer la résistance thermique R_{cc2} équivalente à cette interface.

5) Quelle est l'équation vérifiée par T(z) à l'intérieur de la couche de glace ? En déduire l'expression de T(z) à l'intérieur de la couche de glace en fonction de T(0), T(-e) et z.

6) En utilisant la loi de Fourier, exprimer le flux Φ dans la glace en fonction de T(0), T(-e), λ_{glace} et S. Calculer la résistance thermique R_{glace} de la couche de glace.

7) Les résistances R_{cc1}, R_{glace} et R_{cc2} sont-elles associées en série ou en parallèle ? Exprimer Φ en fonction de T_{eau}, T_{air}, R_{cc1}, R_{cc2} et R_{glace}. Application numérique.

On étudie l'évolution au cours d'une durée Δt = 1 heure. Le transfert thermique cédé par l'eau à 0°C a pour conséquence la formation d'une masse m_g de glace, qui se répartit uniformément sur toute la surface et entraîne une variation Δe de l'épaisseur de la couche de glace.
8) Exprimer la variation d'enthalpie ΔH_{eau} de l'eau en fonction de Φ et Δt. En déduire l'expression de m_g en fonction de Φ, Δt et ℓ_{sol}. AN : calculer m_g

9) Calculer la variation Δe de l'épaisseur de la couche de glace. Nous avons considéré l'épaisseur e constante dans tous nos calculs, était-ce justifié ?

Corrigé

Exercice 7 Solutions (?) de l'équation de la chaleur

a) $\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{-\theta_0}{\tau}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ et $\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}=-\theta_0\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit alors $\frac{-\theta_0}{\tau}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)=-\alpha\theta_0\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

T_1 est solution <=> $\frac{4L^2}{\pi\tau}=\alpha$ (à une constante multiplicative près, on retrouve la relation générale $\alpha\simeq\frac{L_c^2}{\tau_c}$)

b) $\frac{\partial T_2}{\partial t}=-\omega\theta_0\sin\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ et $\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}=\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\theta_0\cos\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$

Equation de la diffusion thermique : $-\omega\theta_0\sin\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)=\alpha\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\theta_0\cos\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ => impossible (deux fonctions sinusoïdales déphasées), sauf si $\theta_0 = 0$ (alors $T_2 = T_0$, température uniforme et constante au cours du temps)

c) $\frac{\partial T_3}{\partial t}=-\omega\theta_0\cos(\omega t)$ et $\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}=0$

Equation de la diffusion thermique : $-\omega\theta_0\cos(\omega t)=0$, possible seulement si $\theta_0 = 0$ (alors $T_3 = T_0$, température uniforme et constante au cours du temps)

d) $\frac{\partial T_4}{\partial t}=0$ et $\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}=0$, l'équation $\frac{\partial T_4}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}$ est vérifiée : T_4 est une solution de l'équation de la diffusion thermique. On reconnaît la solution obtenue en régime permanent dans le cas 1D (variation affine).

Exercice 11 La dinde

1) $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ dans le cas 1D, $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla^2.T=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$ dans le cas 3D (en cartésiennes)

Par analyse dimensionnelle, on en déduit la relation $\alpha=\frac{L_c^2}{\tau_c}$

2) $m=\mu V$ et la dinde est assimilée à une sphère, donc $m=\mu\frac{4}{3}\pi R^3$ et $R=\left(\frac{3m}{4\pi\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$

On obtient R_1 = 8,4 cm et R_2 = 9,4 cm

3) $\alpha=\frac{R_1^2}{\tau_1}$ et $\alpha=\frac{R_2^2}{\tau_2}$ (α possède la même valeur dans les deux cas, car il s'agit du même milieu)

On en déduit $\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}$ puis $\tau_2=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\tau_1=1{,}9\,h\simeq 1\,h\,50$

Exercice 12 Le gâteau

On peut assimiler le gâteau à un cylindre de rayon R (le même pour les deux gâteaux, car il s'agit du même moule) et de hauteur H. Pour le gâteau pour 6 personnes $m_1=\mu_g\pi R^2 H_1$, pour 10 personnes $m_2=\mu_g\pi R^2 H_2$. La masse de pâte utilisée est proportionnelle au nombre de personnes, donc $\frac{m_2}{m_1}=\frac{10}{6}$

Dans cette situation, pour la diffusion thermique L_c = H (ou H/2) (c'est la hauteur du gateau qui détermine le temps de cuisson, car c'est la plus petite distance à parcourir pour atteindre le centre), on aura donc $\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{H_2^2}{H_1^2}=\frac{m_2^2}{m_1^2}=\left(\frac{10}{6}\right)^2$

Finalement τ_2 = 97 minutes