P10 - Conduction thermique - TD
Corrigé

<u>Exercice 7</u> Solutions (?) de l'équation de la chaleur

a) $\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{-\theta_0}{\tau}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ et $\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = -\theta_0\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit alors $\frac{-\theta_0}{\tau}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = -\alpha\theta_0\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

T_1 est solution <=> $\frac{4L^2}{\pi\tau} = \alpha$ (à une constante multiplicative près, on retrouve la relation générale $\alpha \simeq \frac{L_c^2}{\tau_c}$)

b) $\frac{\partial T_2}{\partial t} = -\omega\theta_0\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ et $\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\theta_0\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$

Equation de la diffusion thermique : $-\omega\theta_0\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = \alpha\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\theta_0\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ => impossible (deux fonctions sinusoïdales déphasées), sauf si $\theta_0 = 0$ (alors $T_2 = T_0$, température uniforme et constante au cours du temps)

c) $\frac{\partial T_3}{\partial t} = -\omega\theta_0\cos(\omega t)$ et $\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} = 0$

Equation de la diffusion thermique : $-\omega\theta_0\cos(\omega t) = 0$, possible seulement si $\theta_0 = 0$ (alors $T_3 = T_0$, température uniforme et constante au cours du temps)

d) $\frac{\partial T_4}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} = 0$, l'équation $\frac{\partial T_4}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}$ est vérifiée : T_4 est une solution de l'équation de la diffusion thermique. On reconnaît la solution obtenue en régime permanent dans le cas 1D (variation affine).

<u>Exercice 9</u> Refroidissement d'un lingot de forge

1) $m = \mu V = 40\,\text{kg}$ $C = mc = 2{,}0.10^4\,\text{J.K}^{-1}$

2) $\Phi = hs(T(t) - T_a)$ (orienté de l'acier vers l'air) $R = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{1}{hS} = 0{,}59\,\text{K.W}^{-1}$

3) $dU = \delta W + \delta Q$, pas de variation de volume donc $\delta W = 0$

$C(T(t+dt) - T(t)) = -\Phi dt$ (δQ est reçu par le lingot alors que Φ est orienté du lingot vers l'air)

$C\frac{dT}{dt} = \frac{-1}{R}(T(t) - T_a)$ d'où $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{RC}T(t) = \frac{1}{RC}T_a$ soit $\tau = RC$

4) $T(t) = Ke^{-t/\tau}$ avec la condition initiale $T(0) = T_0 = K$ d'où $T(t) = T_0 e^{-t/\tau}$ AN $\tau = 12.10^3$ s

5) Pour l'eau on obtient $\tau = 2{,}4.10^2$ s.

6) $\alpha = \frac{\lambda}{\mu c} = 2{,}5.10^{-5}\,\text{m}^2\text{.s}^{-1}$ avec $\alpha = \frac{L_c^2}{\tau_c}$ en prenant L_c = 10 cm on obtient $\tau_c = 400\,\text{s}$

Pour que la température puisse être considérée comme uniforme dans le lingot, il faut que $\tau_c \ll \tau$, ce qui est le cas lorsque le lingot est plongé dans l'air, mais pas lorsqu'il est plongé dans l'eau.

<u>Exercice 10</u> Double vitrage

1) $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ pour chaque couche, d'où $R_1 = R_3 = 5.10^{-3}\,\text{K.W}^{-1}$ et $R_2 = 0{,}48\,\text{K.W}^{-1}$

La résistance thermique globale vaut donc $R_{vitrage} = R_1 + R_2 + R_3 = 0{,}49\,\text{K.W}^{-1}$

2) En orientant le flux vers l'extérieur, $\Phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{vitrage}} = 41\,\text{W}$

3) $R_{bois} = \frac{e_{bois}}{\lambda_{bois}S_{bois}} = 1{,}0\,\text{K.W}^{-1}$ on a une association en parallèle donc $R_{globale} = \frac{R_{bois}R_{vitrage}}{R_{bois} + R_{vitrage}} = 0{,}33\,\text{K.W}^{-1}$ et $\Phi_{tot} = 60\,\text{W}$

4) Sur la surface totale de la fenêtre, on a $R_{cc} = \frac{1}{hS_{tot}} = 9.10^{-2}\,\text{K.W}^{-1}$, pas négligeable devant $R_{globale}$, il faudrait donc prendre en compte (deux fois) cette résistance thermique en série avec $R_{globale}$.

Exercice 11 La dinde

1) $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ dans le cas 1D, $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla^2.T=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$ dans le cas 3D (en cartésiennes)

Par analyse dimensionnelle, on en déduit la relation $\alpha=\frac{L_c^2}{\tau_c}$

2) $m=\mu V$ et la dinde est assimilée à une sphère, donc $m=\mu\frac{4}{3}\pi R^3$ et $R=\left(\frac{3m}{4\pi\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$

On obtient R_1 = 8,4 cm et R_2 = 9,4 cm

3) $\alpha=\frac{R_1^2}{\tau_1}$ et $\alpha=\frac{R_2^2}{\tau_2}$ (α possède la même valeur dans les deux cas, car il s'agit du même milieu)

On en déduit $\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}$ puis $\tau_2=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\tau_1=1{,}9\,\text{h}\simeq 1\,\text{h}50$

Exercice 12 Le gâteau

On peut assimiler le gâteau à un cylindre de rayon R (le même pour les deux gâteaux, car il s'agit du même moule) et de hauteur H. Pour le gâteau pour 6 personnes $m_1=\mu_g\pi R^2 H_1$, pour 10 personnes $m_2=\mu_g\pi R^2 H_2$.

La masse de pâte utilisée est proportionnelle au nombre de personnes, donc $\frac{m_2}{m_1}=\frac{10}{6}$

Dans cette situation, pour la diffusion thermique L_c = H (ou H/2) (c'est la hauteur du gateau qui détermine le temps de cuisson, car c'est la plus petite distance à parcourir pour atteindre le centre), on aura donc

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{H_2^2}{H_1^2}=\frac{m_2^2}{m_1^2}=\left(\frac{10}{6}\right)^2$$

Finalement τ_2 = 97 minutes