

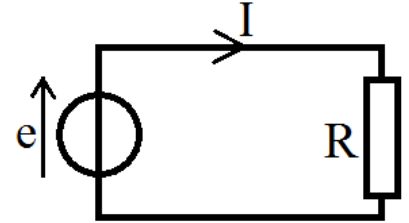
Exercice 1 Spire fixe dans un champ variable

1) $\Phi(t) = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 S \sin(\omega t)$ (spire plane, champ uniforme et colinéaire à $\vec{S}$).

2) Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S \omega \cos(\omega t)$

3) On obtient $I(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{B_0 S \omega}{R} \cos(\omega t)$

4) $I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} = \frac{B_0 S \omega}{\sqrt{2} R}$ AN : $I_{\text{eff}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ A}$



Exercice 2 Spire mobile dans un champ permanent

1) $\Phi(t) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = B_0 S \cos(\varphi(t)) = B_0 S \cos(\Omega t + \varphi_0)$ (spire plane, champ uniforme)

2) Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = +B_0 S \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0)$. $e_{\text{eff}} = \frac{e_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{B_0 S \Omega}{\sqrt{2}}$

3) $I(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{B_0 S \Omega}{R} \sin(\Omega t + \varphi_0)$

Exercice 3 Solénoïde

1) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{u}_z$ donc $\Phi_{\text{spire}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = \left(\mu_0 \frac{N}{l} I \vec{u}_z \right) \cdot (S \vec{u}_z) = \left(\mu_0 \frac{N}{l} I \right) \cdot S$

2) $\Phi_{\text{propre}} = N \Phi_{\text{spire}} = N \left[\left(\mu_0 \frac{N}{l} I \right) \cdot S \right] = \mu_0 \frac{N^2}{l} S I$ où S est la surface d'une spire (=section du solénoïde)

$\Phi_{\text{propre}} = L I$ donc $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$

3) e_{auto} doit être orienté dans le même sens que i dans le circuit (convention générateur), et il faut tenir compte de la résistance interne r du solénoïde. C'est donc le premier circuit (à gauche) qui correspond à la situation.

4) $u_L = r i + L \frac{di}{dt}$, on retrouve $u_L = L \frac{di}{dt}$ si la résistance du solénoïde est nulle (relation tension-courant pour une bobine).

Exercice 4 Rail de Laplace

1) $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt}$ où S est la surface du circuit ($\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont dans le même sens)

On note AB_0 la longueur du côté AB pour $x = 0$: alors $S = AD \cdot AB = AD \cdot (AB_0 - x(t)) = a \cdot (AB_0 - x(t))$

$e(t) = -B \frac{d(a \cdot (AB_0 - x(t)))}{dt} = +B a \frac{dx}{dt} = B a v$

2) En négligeant l'auto-induction, d'après le circuit équivalent $i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{B a v}{R}$ et $P_e = e(t) i(t) = \frac{B^2 a^2 v^2}{R}$

3) $\vec{F}_L = i \vec{BC} \wedge \vec{B} = -i a B \vec{u}_x = -B^2 a^2 \frac{v}{R} \vec{u}_x$ $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -\frac{B^2 a^2 v^2}{R}$

4) On a $P_L = -P_e$, on retrouve la relation générale $P_e + P_L = 0$ (la puissance de la force magnétique est nulle)

5) Pour maintenir la vitesse constante, l'opérateur (en l'absence de frottement) doit exercer une force égale à la force de Laplace, donc $P_{\text{op}} = -P_L = \frac{B^2 a^2 v^2}{R}$. D'autre part $P_R = R i^2 = \frac{B^2 a^2 v^2}{R}$, on obtient un rendement $\eta = 1$

(la conversion électromécanique en elle-même a toujours un rendement égal à 1 d'après la relation $P_e + P_L = 0$, mais on a négligé les frottements (pertes mécaniques), et la résistance du reste du circuit (pertes électriques)).

Exercice 5 Boussole

1) $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{\mu} = -\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\| \sin \theta \vec{u}_z$ donc $M_z = -\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\| \sin \theta$

2) Les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (pour avoir $M_z = 0$)

La position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable : en s'écartant faiblement de la position d'équilibre, dans le cas $\theta > 0$, on remarque que $M_z < 0$, l'aiguille revient vers la position $\theta = 0$ (même conclusion si $\theta < 0$).

La position $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable : en s'écartant faiblement de la position d'équilibre, dans le cas $\theta < \pi$, on remarque que $M_z < 0$, l'aiguille revient vers la position $\theta = 0$ (même conclusion si $\theta > \pi$).

3) Théorème du moment dynamique en projection sur Oz (le théorème de l'énergie cinétique aboutit au même résultat) : $I_{Oz} \ddot{\theta} = -\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\| \sin \theta \Rightarrow$ forme canonique : $\ddot{\theta} + \frac{\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\|}{I_{Oz}} \sin \theta = 0$

4) Pour les petites oscillations, $\sin \theta \approx \theta$ donc l'équation se simplifie : $\ddot{\theta} + \frac{\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\|}{I_{Oz}} \theta = 0$

On identifie $\omega_0^2 = \frac{\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\|}{I_{Oz}}$ donc $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\|\vec{B}\| \|\vec{\mu}\|}{I_{Oz}}$ et $\|\vec{\mu}\| = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{I_{Oz}}{\|\vec{B}\|}$

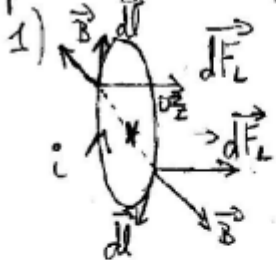
Ordre de grandeur pour le champ terrestre : $\|\vec{B}\| \approx 10^{-5} \text{ T}$, on obtient $\|\vec{\mu}\| \approx 10^{-1} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

5) Le champ magnétique créé par un aimant permanent est beaucoup plus intense (10 à 100 mT) que le champ terrestre, d'après la relation de la question précédente la pulsation sera plus élevée, donc la période sera plus faible (oscillations plus rapides).

6) Pour une intensité I de l'ordre de 1 A, une surface $S \sim 0,1 \text{ m}^2$ est nécessaire, on en déduit $R \sim 20 \text{ cm}$

Une bobine de 100 spires, avec une surface $S' = S/100$ pour chaque spire (rayon $R \sim 2 \text{ cm}$), permet de réduire l'encombrement en conservant le même moment magnétique.

Haut-parleur électrodynamique



$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(-dl \vec{u}_\theta) \wedge (B \vec{u}_z)$$

$$\boxed{d\vec{F}_L = i dl B \vec{u}_r}$$

$$2) \vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} d\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} i dl B \vec{u}_z = i l B \vec{u}_z$$

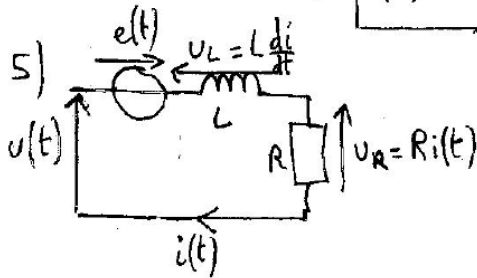
$$\boxed{\vec{F}_L = i l B \vec{u}_z}$$

$$3) \text{PFD sur } \vec{u}_z \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = i(t) l B - k \frac{dz}{dt} - k z$$

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m} z(t) = \frac{i(t) l B}{m}}$$

$$4) P_L + P_e = 0 \Leftrightarrow i(t) l B \frac{dz}{dt} = -e(t) i(t)$$

$$\Leftrightarrow e(t) = -Bl \frac{dz}{dt}$$



$$6) v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} - e(t)$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{v(t)}{L} - \frac{Bl}{L} \frac{dz}{dt}$$

$$7) \int (j\omega)^2 \underline{z} + \frac{h}{m} (j\omega) \underline{z} + \frac{k}{m} \underline{z} = \underline{i} \frac{lB}{m} \quad (\text{mécanique})$$

$$(j\omega) \underline{i} + \frac{R}{L} \underline{i} = \frac{1}{L} \underline{v} - \frac{Bl}{L} (j\omega) \underline{z}$$

ou encore

$$\begin{cases} (j\omega)^2 \underline{z} + \frac{h}{m} (j\omega) \underline{z} + \frac{k}{m} \underline{z} = \frac{lB}{m} \underline{i} & (1) \\ \underline{v} = (jL\omega + R) \underline{i} + Bl(j\omega) \underline{z} & (2) \end{cases}$$

$$8) (1) \rightarrow \underline{z} = \frac{\frac{lB}{m}}{(j\omega)^2 + \frac{h}{m} (j\omega) + \frac{k}{m}} \underline{i}$$

$$(2) \rightarrow \underline{v} = (jL\omega + R) \underline{i} + \frac{\frac{(lB)^2}{m} (j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{h}{m} (j\omega) + \frac{k}{m}} \underline{i}$$

$$\frac{\underline{v}}{\underline{i}} = (R + jL\omega) + \frac{h(lB)^2}{1 + j\omega \frac{m}{h} + \frac{k}{h} \left(\frac{1}{j\omega} \right)} = (R + jL\omega) + \frac{h(lB)^2}{1 + j\left(\omega \frac{m}{h} - \frac{k}{h\omega}\right)}$$

Par identification

$$\underline{z}_1 = R + jL\omega$$

$$h(lB)^2 = R'$$

$$\begin{cases} \frac{m}{h} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{k}{h} = Q\omega_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ Q &= \frac{\sqrt{hm}}{h} \end{aligned}}$$

Pince ampèremétrique

1) Pour un fil rectiligne infini $\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ donc $\boxed{\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$

2) $\Phi_{1\text{spire}} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S} = a^2 B_1 = \boxed{\mu_0 \frac{a^2 I(t)}{2\pi (\frac{3a}{2})}}$ pour 1 spire

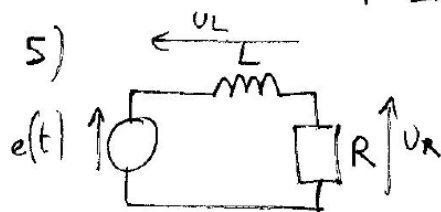
$\boxed{\Phi_1 = N \Phi_{1\text{spire}} = \mu_0 \frac{Na I(t)}{3\pi}}$

3) $e_1(t) = - \frac{d\Phi_1}{dt} = \boxed{-\mu_0 \frac{Na}{3\pi} \frac{dI}{dt}}$ ($= +\mu_0 \frac{Na \omega}{3\pi} I_m \sin(\omega t)$)

4) $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i$ donc $\Phi_{\text{propre}} = \mu_0 \frac{N^2}{l} i S$ et $\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}}$ pour un solénoïde.

Ici on peut prendre $l = 2\pi r_{\text{moy}}$ (longueur "moyenne")

d'où $L = \mu_0 \frac{N^2 a^2}{2\pi (\frac{3a}{2})} = \boxed{\mu_0 \frac{N^2 a}{3\pi}}$



On a $e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$

$-\mu_0 \frac{Na}{3\pi} \frac{dI}{dt} = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow -\mu_0 \frac{Na}{3\pi} (j\omega) \underline{I} = R \underline{i} + jL\omega \underline{i}$

$\boxed{\frac{\underline{i}}{\underline{I}} = - \frac{\mu_0 \frac{Na}{3\pi} (j\omega)}{R + (j\omega) \mu_0 \frac{N^2 a}{3\pi}}}$

6) Si $N \gg 1$, on néglige R dans le dénominateur donc $\frac{\underline{i}}{\underline{I}} \approx -\frac{1}{N}$

$\boxed{\underline{i} \approx \frac{-\underline{I}}{N}}$

On peut mesurer le courant i image du courant I sans ouvrir le circuit.
 → permet de mesurer I dans des circuits de puissance sans interrompre leur fonctionnement.