P11 - Induction électromagnétique et Forces de Laplace - Révisions

<u>Loi de Faraday</u> Lorsque le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers un circuit varie au cours du temps, une force électromotrice d'induction $e=-\frac{d\Phi}{dt}$ (unité : Volt) apparaît dans le circuit.

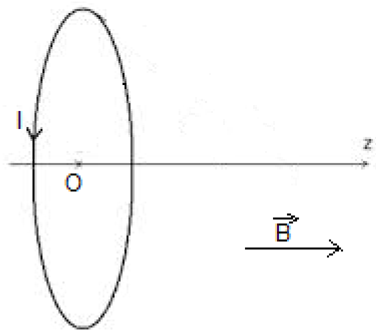
<u>Calcul du flux magnétique Φ à travers un circuit</u>

Pour un circuit plan de surface S et un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme : $\Phi=\vec{B}.\vec{S}$
$\vec{S}$: vecteur de norme S, orthogonal à S et orienté d'après le courant (règle de la main droite)

Dans le cas général, $\Phi=\iint_{M\in S}\vec{B}(M).\vec{dS}$

<u>Circuit équivalent</u> Pour tenir compte de l'induction, on insère dans le circuit un générateur idéal délivrant une tension e(t) (f.é.m d'induction), orientée dans le même sens que le courant.

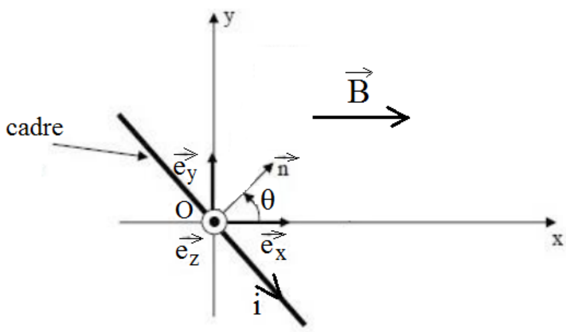
<u>Exercice 1</u> Spire immobile dans un champ variable



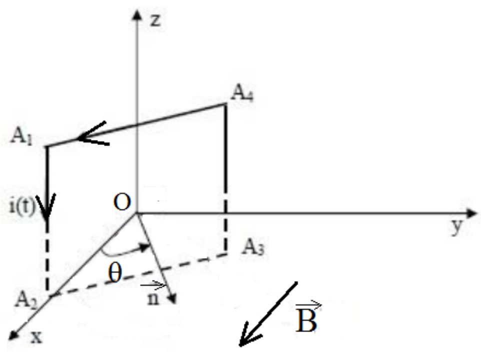
Une spire de résistance totale R et de surface S est placée dans un champ magnétique uniforme dépendant du temps $\vec{B}=B_0\sin(\omega t)\vec{u_z}$ (on néglige le champ magnétique créé par la spire).

1) Représenter le vecteur surface $\vec{S}$ sur le schéma, puis exprimer le flux Φ(t) du champ magnétique à travers la spire.
2) En déduire l'expression de la fém d'induction e(t) qui apparaît dans le circuit.
3) Représenter le circuit équivalent et exprimer l'intensité I(t) du courant dans la spire.
4) AN Calculer la valeur efficace I_{eff} de I(t) pour R = 1 Ω, B_0 = 2 mT, f = 50 Hz, S = 5 cm^2.

<u>Exercice 2</u> Cadre mobile dans un champ permanent



vue de dessus



vue en perspective

Un circuit rectangulaire de surface S et de résistance R est en rotation autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante $\Omega=\frac{d\theta}{dt}$ (θ est l'angle formé entre $\vec{e_x}$ et le vecteur normal unitaire $\vec{n}$) : on a donc $\theta(t)=\Omega t+\theta_0$ où θ_0 est une constante (valeur de θ à t = 0)

Le champ magnétique est uniforme, stationnaire et dirigé selon $\vec{u_x}$: $\vec{B}=B_0\vec{u_x}$

1) Exprimer le flux Φ(t) du champ magnétique à travers le cadre en fonction de S, B_0, Ω, t et θ_0.
2) Calculer la fém d'induction e(t) qui apparaît dans le cadre. Exprimer sa valeur efficace.
3) Exprimer l'intensité I(t) du courant qui traverse le cadre.

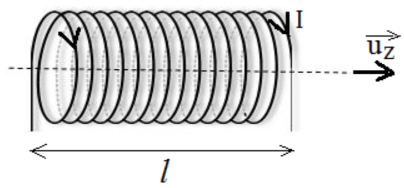
<u>Auto-induction</u> Un circuit parcouru par un courant d'intensité I crée un champ magnétique ("champ propre") $\vec{B}_{propre}$. Le flux de ce champ à travers le circuit est appelé *flux propre* (Φ_{propre}) : c'est le flux magnétique créé par le circuit à travers lui-même.

L'inductance L (ou *coefficient d'auto-induction*) est défini par $\Phi_{propre} = L I$

Lorsque le courant I varie, Φ_{propre} varie aussi, on observe l'apparition d'une fém d'auto-induction $e_{auto} = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$ (fém à prendre en compte dans le circuit équivalent).

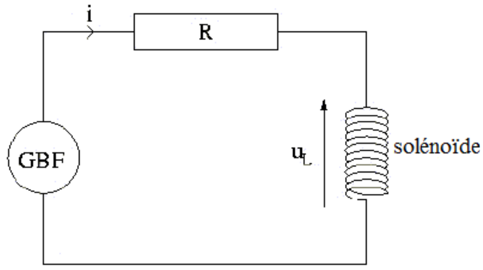
<u>Exercice 3</u> Solénoïde

Un solénoïde est une bobine formée d'un grand nombre (N) d'enroulements, que l'on peut assimiler à N spires jointives parcourues par un courant I. Chaque spire présente une surface S. La longueur du solénoïde est notée *l*.

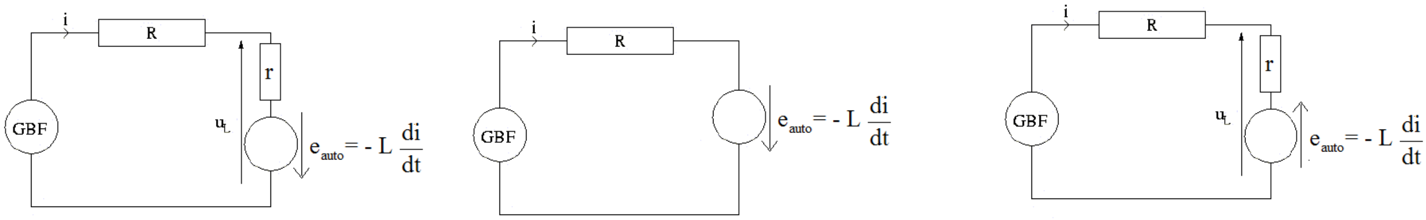


1) Exprimer le flux magnétique Φ_{spire} à travers <u>une</u> spire du solénoïde en fonction de μ_0, N, *l* , I et S.
2) Exprimer le flux magnétique total Φ_{auto} à travers l'ensemble du solénoïde. En déduire l'expression de l'inductance L du solénoïde.

Le fil qui constitue l'enroulement du solénoïde présente une résistance r. On place le solénoïde en série avec un générateur basses fréquences et une résistance R (schéma ci-contre)



3) Parmi les circuits équivalents suivants, lequel correspond à cette situation ?



4) Exprimer u_L en fonction de r, L et i. Pour une bobine idéale (r = 0), quelle relation retrouve-t-on ?

<u>Induction mutuelle</u> Lorsque deux circuits sont parcourus par des courants d'intensités I_1 et I_2, ils créent respectivement des champs $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$. On a alors :

- $\Phi_1 = \Phi_{1\to1} + \Phi_{2\to1} = L_1 I_1 + M I_2$
- $\Phi_2 = \Phi_{2\to2} + \Phi_{1\to2} = L_2 I_2 + M I_1$

M est l'inductance mutuelle des deux circuits.
(la notation $\Phi_{a\to b}$ signifie "flux créé par le circuit a à travers le circuit b")

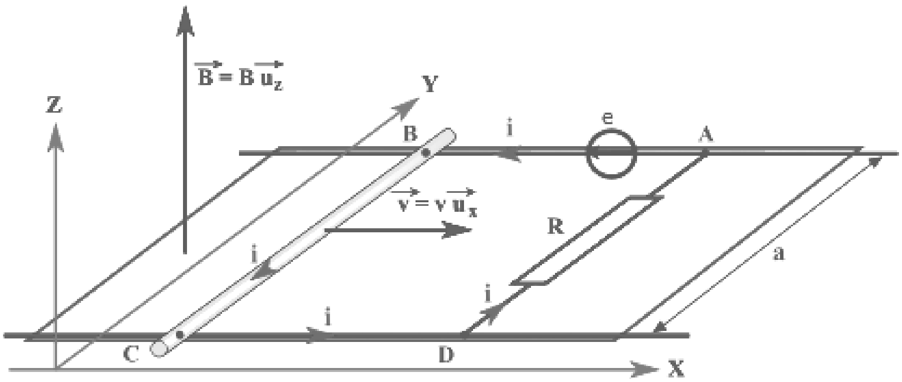
Dans le cas d'un transformateur, $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

P11 - Induction électromagnétique et Forces de Laplace - Révisions

<u>Forces de Laplace</u> Un conducteur de longueur *l* parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit des forces de Laplace (résultante notée $\vec{F_L}$)

Pour un conducteur rectiligne de longueur *l* dans un champ $\vec{B}$ uniforme, $\vec{F_L} = I.\vec{l} \wedge \vec{B}$
$\vec{l}$: vecteur de norme *l*, orienté dans le sens du courant

<u>Exercice 4</u> Rails de Laplace



Deux rails AB et CD parallèles, distants de *a*, de résistance négligeable, sont placés dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u_z}$. Les rails sont reliés par une résistance R (segment DA). Une tige conductrice de résistance négligeable, de masse m peut se déplacer sans frottement sur les rails. On note x(t) la position de la tige à un instant t.

Un opérateur extérieur agit sur la tige de telle sorte qu'elle se déplace à vitesse constante : $v = \frac{dx}{dt}$

1) Exprimer la fém d'induction e(t) qui apparaît dans le circuit ABCD.
2) Exprimer l'intensité i(t), puis la puissance (électrique) P_e = e(t).i(t) fournie au circuit par la fém d'induction.
3) Exprimer la force de Laplace $\vec{F_L}$ subie par la tige mobile BC, puis la puissance (mécanique) P_L associée.
4) Quelle relation simple peut-on écrire entre P_e et P_L ?

<u>Aspects énergétiques</u>

La puissance électrique instantanée fournie au circuit par la fém d'induction vaut $P_e = e.I$. D'autre part, la puissance mécanique instantanée des forces de Laplace vaut $P_L = \vec{F_L}.\vec{v_e}$ où $\vec{v_e}$ est la vitesse du conducteur dans le référentiel d'étude.

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, le bilan énergétique des effets magnétiques (induction et forces de Laplace) indique que $P_e + P_L = 0$ (conversion électromécanique).

<u>Loi de Lenz</u> (permet de vérifier qualitativement les résultats obtenus)

Les effets de l'induction s'opposent à ses causes :
- circuit mobile dans un champ stationnaire : le courant induit génère des forces de Laplace qui s'opposent au mouvement
- circuit fixe dans un champ variable : le courant induit crée un champ magnétique dont les variations s'opposent à celles du champ extérieur

Moment magnétique

Pour décrire de façon unifiée les circuits et les aimants, on utilise le moment magnétique $\vec{\mu}$ (en A.m^2).

Pour une spire

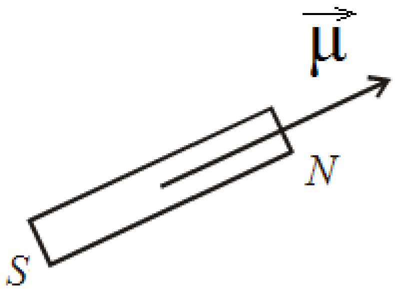
Pour un aimant

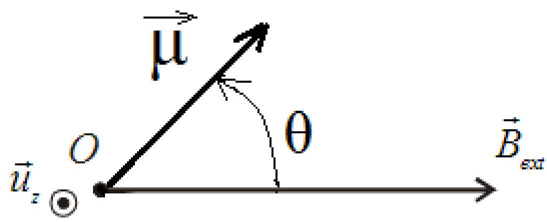
Le moment magnétique permet d'exprimer simplement le moment $\vec{M}$ des forces de Laplace subies par un circuit (ou des actions magnétiques subies par un aimant) dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ uniforme.

$$\vec{M}=\vec{\mu}\wedge\vec{B}$$

Exercice 5 Boussole

Une boussole contient une aiguille aimantée libre de tourner autour d'un axe Oz. On place la boussole dans un champ extérieur uniforme et stationnaire $\vec{B}_{ext}$. On associe un moment magnétique $\vec{\mu}$ à l'aiguille aimantée et on note θ l'angle entre $\vec{B}_{ext}$ et $\vec{\mu}$.





1) Exprimer le moment $\vec{M}$ subi par l'aiguille en fonction de $\|\vec{\mu}\|$, $\|\vec{B}_{ext}\|$, θ et $\vec{u}_z$, puis exprimer sa composante M_z suivant l'axe Oz.

2) Quelles sont les valeurs de θ correspondant à une position d'équilibre ? S'agit-il de positions d'équilibre stable ?

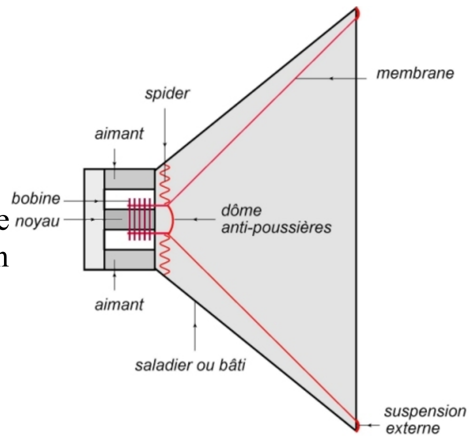
3) On note I_{Oz} = 1,0.10^{-7} kg.m^2 le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe Oz ; en prenant en compte uniquement les actions magnétiques, établir l'équation différentielle du mouvement pour l'angle $\theta(t)$.

4) Dans le champ magnétique terrestre, on observe une période T ~ 2 s pour les petites oscillations de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable. En déduire l'ordre de grandeur du moment magnétique $\|\vec{\mu}\|$ de l'aiguille.

5) Comment la période des oscillations évolue-t-elle si l'on approche un aimant permanent ?

6) On souhaite remplacer l'aiguille aimantée par une spire circulaire équivalente (de même moment magnétique). Proposer un ordre de grandeur raisonnable pour le rayon R de la spire et l'intensité I qui la traverse. Comment réduire l'encombrement en conservant le même moment magnétique ?

Exercice 6 Haut-parleur électrodynamique



Un haut-parleur électrodynamique (schéma ci-contre) comprend :
- une partie fixe constituée de l'aimant et du bâti
- une partie mobile constituée de la membrane et de la bobine

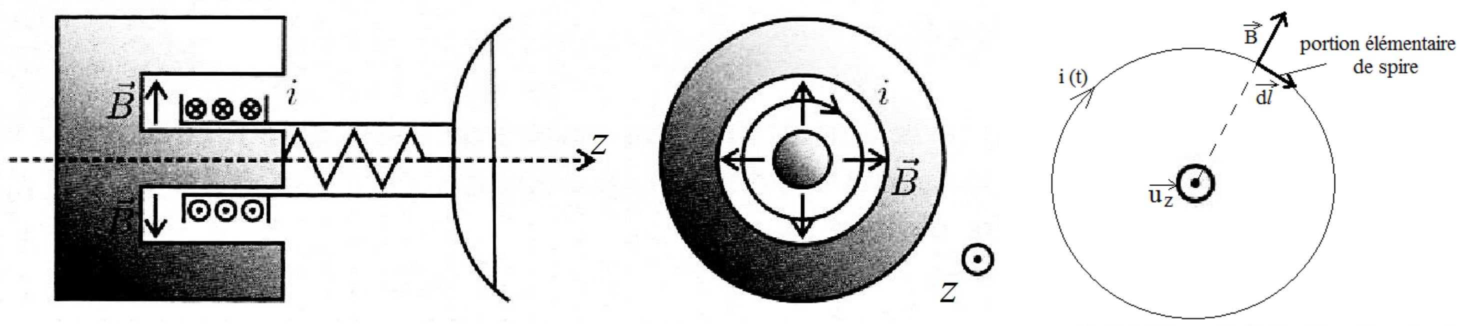
Ces deux parties sont liées de façon élastique par le *spider* et par une suspension externe. Le haut-parleur possède une symétrie de révolution autour de son axe, on utilise donc les coordonnées cylindriques.

On modélise le haut parleur de la façon suivante :

- l'aimant crée dans l'entrefer un champ radial $\vec{B} = B_0 \vec{u}_r$

- la bobine est parcourue par un courant i(t) ; la longueur totale du fil qui la constitue est notée ℓ. Elle présente une résistance R et une inductance propre L.

- l'ensemble bobine+membrane possède une masse m ; il subit de la part du spider une force de rappel $\vec{F}_r = -k z \vec{u}_z$ où z est repéré par rapport à la position d'équilibre. Il subit aussi une force de frottement exercée par l'air, de la forme $\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$
- un générateur extérieur impose une tension u(t) aux bornes de la bobine



Equation mécanique

1) Exprimer et représenter sur un schéma la force de Laplace élémentaire $\overrightarrow{dF_L}$ qui s'exerce sur une portion élémentaire de spire de longueur $d\,l$ (voir schéma de droite).

2) En déduire la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace sur la bobine en fonction de B_0 , ℓ, i(t) et $\vec{u}_z$.

3) Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle z(t) obéit.

Equation électrique
Le déplacement de la bobine dans le champ magnétique provoque l'apparition d'une fém d'induction e(t).

4) Quelle relation existe-t-il entre la puissance mécanique P_L des forces de Laplace et la puissance électrique P_e cédée par la fém d'induction au circuit ? En déduire l'expression suivante :

$$e(t) = - B_0\, \ell\, \frac{dz}{dt}$$

5) On applique une différence de potentiel u(t) aux bornes de la bobine. Représenter le schéma électrique équivalent (on tiendra compte de l'auto-induction et de la résistance de la bobine).
6) Ecrire l'équation différentielle pour i(t).

Etude en régime sinusoïdal forcé

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω et on utilise les amplitudes complexes $\underline{u}$, $\underline{i}$, $\underline{z}$ associées respectivement à u(t), i(t) et z(t).

7) Réécrire les deux équations (mécanique et électrique) en utilisant les amplitudes complexes.

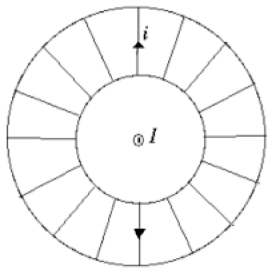
8) Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ du haut-parleur. On mettra $\underline{Z}$ sous la forme suivante (on exprimera R', Q et ω_0 en fonction de m, h, k, B_0 et ℓ) :

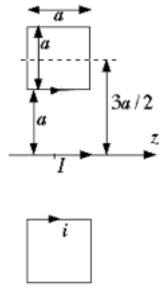
$$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\frac{R'}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$$

Exercice 7 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique permet de mesurer l'intensité I du courant qui traverse un fil rectiligne.

La pince est constituée d'un tore de section carrée de côté a = 2 cm et de rayon moyen r_{moy} = 3 a/2 = 3 cm, sur lequel N spires régulièrement espacées ont été bobinées. Ce circuit, de résistance R, est fermé sur un ampèremètre (non représenté) de résistance négligeable.





Le fil, rectiligne et infini, est parcouru par un courant $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ qui provoque l'apparition d'un courant i(t) dans la bobine.

1) Donner sans démonstration l'expression du champ $\vec{B_1}$ créé par le fil infini en tout point de l'espace.

2) Exprimer le flux de $\vec{B_1}$ à travers une spire de la bobine (on admettra que ce flux est égal à celui d'un champ uniforme sur la spire et égal à $\vec{B_1}(r_{moy})$). En déduire le flux total Φ_1 créé par le fil à travers la bobine.

3) Exprimer la fem d'induction $e_1(t)$ qui apparaît dans la bobine.

On souhaite obtenir une expression approchée de l'inductance L de la bobine.

4) Rappeler l'expression de l'inductance d'un solénoïde "infini" en fonction du nombre de spires N et de la longueur ℓ. En admettant que ce résultat se généralise à la bobine torique, quelle serait la longueur ℓ à prendre en compte ? En déduire une expression approchée de l'inductance de la bobine.

5) Représenter le circuit équivalent à la bobine. En régime sinusoïdal, exprimer le rapport $\frac{\underline{i}}{\underline{I}}$ entre l'amplitude complexe $\underline{i}$ associée à i(t) et l'amplitude complexe $\underline{I}$ associée à I(t).

6) Lorsque N >> 1, quelle relation simple obtient-on entre $\underline{i}$ et $\underline{I}$? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?