Exemple 5

1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 5x-4 = -\infty\end{array}\right\} \text{ par somme } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 5x-4 = +\infty\end{array}\right\} \text{ par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \text{ on ne peut pas conclure directement.}$$

$$f(x) = e^{-x}\left(e^{2x} + 1 + \frac{x}{e^{-x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0}_{\text{par croissance comparée}}\end{array}\right\} \text{ par somme } \lim_{x\to-\infty} e^{2x}+1+\frac{x}{e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \text{ par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

5)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+1=1 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^{x}+1}=3\end{array}\right\}\text{ par somme } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+1=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^{x}+1}=0\end{array}\right\}\text{ par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

6)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-2=-2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+1=1\end{array}\right\}\text{ par quotient } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$$

$$f(x)=\frac{e^{x}\left(1-\frac{2}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{1-\frac{2}{e^{x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{x}}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{e^{x}}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{e^{x}}=1\end{array}\right\}\text{ par quotient } \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

7)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\end{array}\right\}\text{ par produit } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{array}\right\}\text{ on ne peut pas conclure directement.}$$

$$f(x)=\frac{3x}{e^{x}}=\frac{3}{\frac{e^{x}}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ par croissance comparée

donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exemple 6

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^{X}-1}{X}$ avec $X = 2x$

$= 1$ d'après la propriété précédente.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{4x}-2e^{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2e^{4x}-2}{x} + \dfrac{2-2e^{x}}{x} \right)$

$= \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2e^{X}-2}{\frac{X}{4}} - \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)$

avec $X = 4x$

$= \lim\limits_{X\to 0} 8\, \dfrac{e^{X}-1}{X} - \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right) = 8-2 = 6$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \times \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$

On pose $X = x^2$

$= \left(\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^{X}-1}{X} \right) \times \lim\limits_{x\to 0} x$

$= 1 \times 0 = 0.$

Exemple 7

1] $f_1(x) = (3x-2)e^x$

$$f_1'(x) = 3e^x + (3x-2)e^x$$

$$= e^x(3x+1)$$

3] $f_3(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$

$$f_3'(x) = \frac{e^x(e^x+2) - (e^x+1)e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+2)^2}$$

5] $f_5(x) = e^{x^2+3x-3}$ $\quad e^u$

$f_5'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-3}$ $\quad u'e^u$

7] $f_7(x) = \underset{u}{x^2}\,\underset{v}{e^{x^2}}$

$f_7'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{e^{x^2}}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\left(2xe^{x^2}\right)}_{v'}$

$= 2xe^{x^2}\left(1+x^2\right)$

9] $f_9(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}$

$f_9'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+3)-(e^{2x}-1)(2e^{2x})}{(e^{2x}+3)^2}$

$= \dfrac{2e^{4x}+6e^{2x}-2e^{4x}+2e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2}$

$= \dfrac{8e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2}$