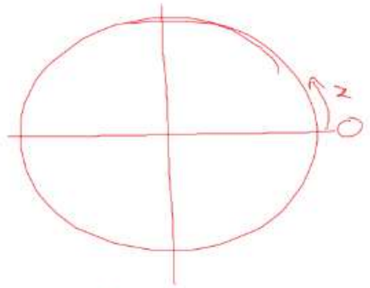
Prop 8



En partant de O, si x augmente alors $\cos x$ diminue sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ la fonction cos est décroissante.

Sa dérivée est négative. Donc $(\cos x)' = - \sin x$

De même la fonction sin est croissante. Sa dérivée y est positive. Donc $(\sin x)' = \cos x$

Exemple 5

1) $f_1(x) = \cos(2x + \pi)$

$$f_1'(x) = 2 \times \left(-\sin(2x+\pi)\right)$$
$$= -2\sin(2x+\pi)$$

3) $f_3(x) = \cos^2 x + 4 \sin(5x + \frac{\pi}{2})$

$$f_3'(x) = 2 (-\sin x) \cos x + 4 \times 5 \times \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$ donc $(u^2)' = 2u'u$

$$f_3'(x) = -2\sin x \cos x + 20 \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\underline{4]} \quad f_4(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

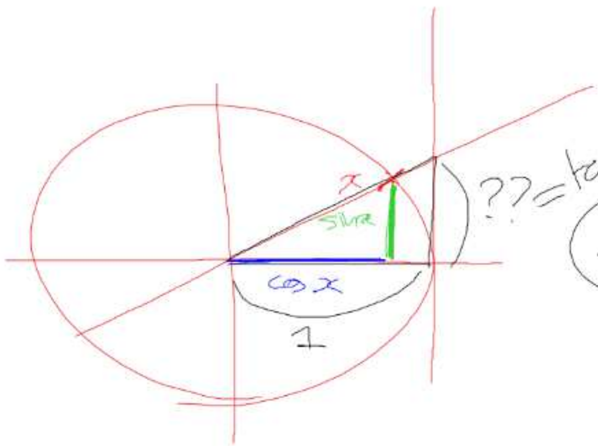
$$f_4'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

$$\text{Donc } \boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.}$$

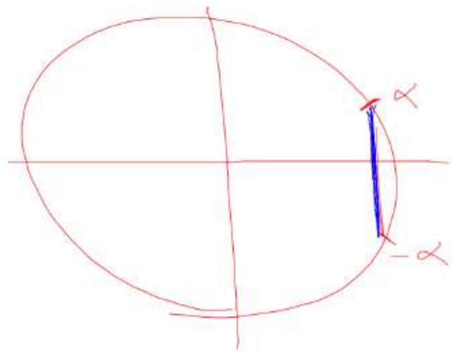
<u>Lecture de tan x sur le cercle trigonométrique</u>



$$?? = \tan x$$

$$\frac{??}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriété 10



α, $\alpha+2\pi$, $\alpha+4\pi$, $\alpha-2\pi$, $\alpha-4\pi$, ...

$-\alpha$, $-\alpha+2\pi$, $-\alpha+4\pi$, $-\alpha-2\pi$, $-\alpha-4\pi$, ...

ont le même cosinus

On en déduit :

$$\cos x = \cos\alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Exemple 6

1) Soit (E_1) l'équation : $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

$$(E_1) \iff \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

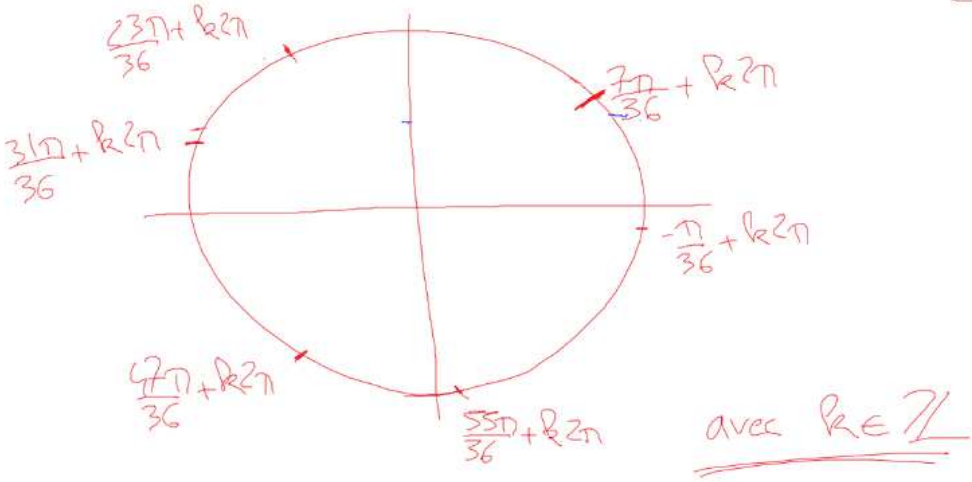
$$\iff \begin{cases} 3x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \; ; \; -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



2) On résout la même équation mais dans $[-\pi ; \pi]$

L'ensemble des solutions de (E_1) dans $[-\pi ; \pi]$

est $S = \left\{ -\frac{25\pi}{36} ; -\frac{17\pi}{36} ; -\frac{\pi}{36} ; \frac{7\pi}{36} ; \frac{23\pi}{36} ; \frac{31\pi}{36} \right\}$

2bis) Même équation mais dans $[0 ; 2\pi]$

$S = \left\{ \frac{47\pi}{36} ; \frac{55\pi}{36} ; \frac{71\pi}{36} ; \frac{7\pi}{36} ; \frac{23\pi}{36} ; \frac{31\pi}{36} \right\}$

3) Soit (E_2) l'équation : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$(E_2) \iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

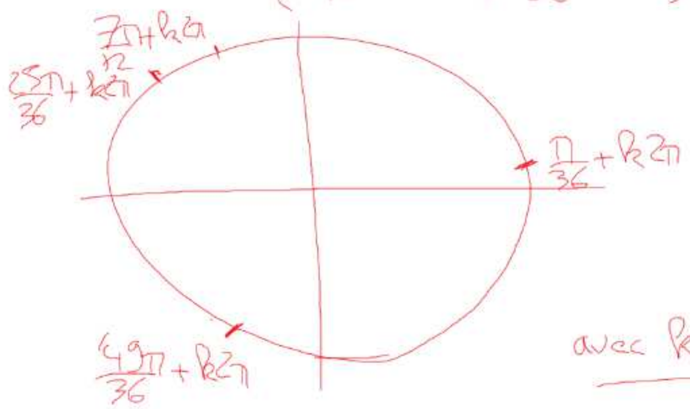
$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

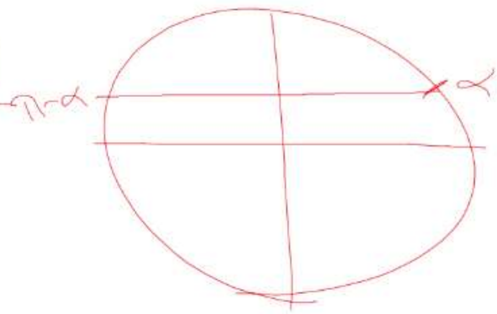
L'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k2\pi \,;\, \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 11



$$\sin x = \sin \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple 7

1) Soit (E_1) l'équation : $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 0$

$$(E_1) \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

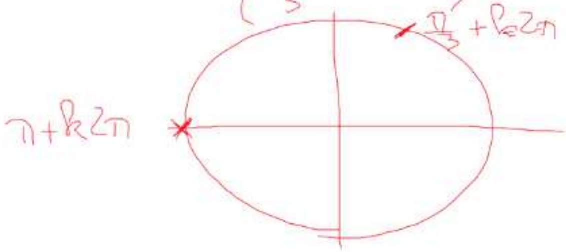
$$\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi \,;\, \pi + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



2) Dans $[-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ -\pi ; \frac{\pi}{3} ; \pi \right\}$$

2bis) Dans $[0 ; 2\pi]$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \pi \right\}$$

2ter) Dans $\left[\frac{3\pi}{2} ; \frac{7\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{3} ; 3\pi \right\}$$