Exemple 8

1) a) $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x$

$= e^x(-1+2-x)$

$= e^x(1-x)$

On dresse le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

Or $f(1) = 1 \times e - 1 = e - 1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-x)e^x = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

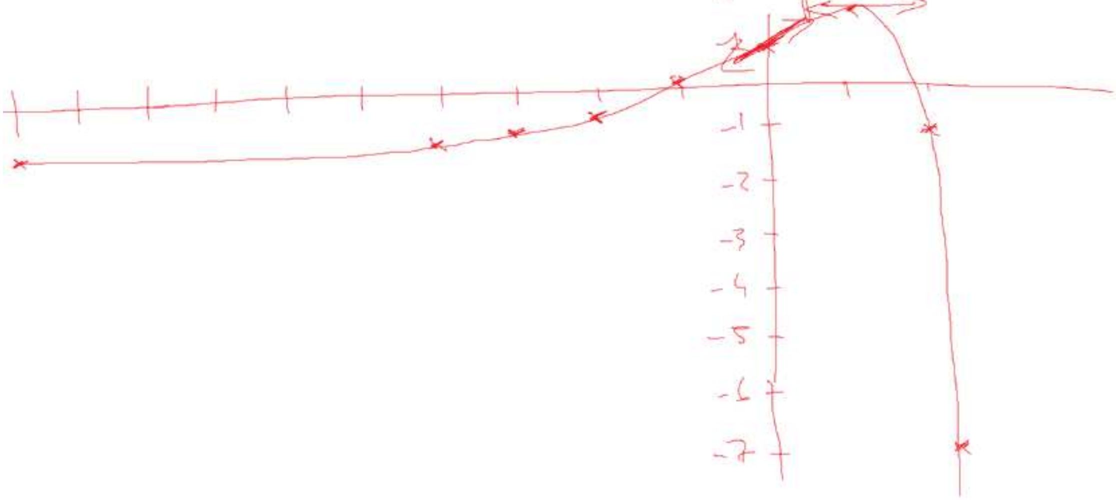
$f(x) = 2e^x - xe^x - 1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \text{ par croissance comparée} \end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

b) On dresse le tableau de valeurs suivant :

x	-10	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\simeq -1$	$\simeq -0{,}9$	$\simeq -0{,}75$	$\simeq -0{,}5$	$\simeq 0{,}1$	1	$\simeq 1{,}7$	-1	$\simeq -2{,}61$

à 10^{-1} près



c) Sur $]-\infty ; 1]$, la fonction f est continue, strictement croissante, admet des valeurs strictement négatives $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1\right)$, strictement positives $\left(f(1) = e - 1\right)$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une seule seule solution que l'on note α dans $]-\infty ; 1]$.

Sur $]1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement décroissante, admet des valeurs strictement positives $\left(f(1) = e - 1\right)$ et des valeurs strictement négatives $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$
L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution, que l'on note β, sur $]1 ; +\infty[$.

Donc, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions : α et β.

D'après la calculatrice :

$$f(-1,146) \simeq 0,0013 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$
$$f(-1,147) \simeq -0,0005 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Donc un encadrement de α à 10^{-3} près est :

$$-1,147 \leq \alpha \leq -1,146$$

$$f(1,841) \simeq 0,002 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$
$$f(1,842) \simeq -0,003 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Donc un encadrement de β à 10^{-3} près est :

$$1,841 \leq \beta \leq 1,842.$$

d) On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

e) $f'(0) = e^0(1-0) = 1$

La tangente cherchée a une équation du type :

$$y = x + b.$$

$f(0) = 2e^0 - 1 = 1.$

Le point A de tangence a pour coordonnées : $(0, 1)$

Donc $y_A = x_A + b \iff 1 = 0 + b \iff b = 1$

La tangente cherchée a pour équation : $y = x + 1.$