

Ch 11 Fonction exponentielle.

Série 11-1

Exemple 1

$$B = \frac{e^2}{e^{3/2}} = e^{2 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{3/2}$$

$$D = \frac{e^{2x+5}}{e^{3x-1}} = e^{2x+5-(3x-1)} = e^{2x+5-3x+1} = e^6$$

$$\begin{aligned} G &= (e^2)^2 + 2e^2 e^{-2} + (e^{-2})^2 + ((e^2)^2 - 2e^2 e^{-2} + (e^{-2})^2) \\ &= (e^{2x} + 2e^{2x-2} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^{2x-2} + e^{-2x}) \\ &= e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - 2e^{-2x} \\ &= 4e^0 = 4 \end{aligned}$$

Exemple 2

$$2) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow (e^x - e^{-x})(1 + e^{-2x}) = (e^x + e^{-x})(1 - e^{-2x})$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^x e^{-2x} - e^{-x} - e^{-x} e^{-2x} = e^x - e^x e^{-2x} + e^{-x} - e^{-x} e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - e^{-x} - e^{-3x} = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-3x} = e^x - e^{-3x} \text{ ce qui est vrai}$$

$$\text{Donc } \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$4) \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{1}{1 - 2e^{-x}} \Leftrightarrow e^x(1 - 2e^{-x}) = e^x - 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2e^x e^{-x} = e^x - 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2e^0 = e^x - 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2 = e^x - 2 \text{ ce qui est vrai}$$

$$\text{Donc } \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{1}{1 - 2e^{-x}}$$

Exemple 3

2) Soit (E_2) l'équation: $e^{x^2} = e^{5x-4}$

$$(E_2) \Leftrightarrow x^2 = 5x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Le discriminant de $x^2 - 5x + 4$ est $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$$\text{Ainsi } (E_2) \Leftrightarrow x = \frac{5+3}{2} \text{ ou } x = \frac{5-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est: $S = \{1; 4\}$

4) Soit (E_4) l'équation: $(e^x - e)(e^{3x} + 5) = 0$

$$(E_4) \Leftrightarrow e^x - e = 0 \text{ ou } e^{3x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e \text{ ou } \underbrace{e^{3x} = -5}_{\text{pas de solution car } e^{3x} > 0}$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

L'ensemble des solutions de (E_4) est: $S = \{1\}$

6) Soit (E_6) l'équation: $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

On pose $X = e^x$

$$(E_6) \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$$

Le discriminant de $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$$\text{donc } (E_6) \Leftrightarrow X = \frac{-1+3}{2} \text{ ou } X = \frac{-1-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } \underbrace{e^x = -2}_{\text{pas de solution car } e^x > 0}$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_6) est $S = \{0\}$.

Exemple 4

2) Soit (I_2) l'inéquation $e^{-\frac{1}{x}} \leq e^{x-2}$

l'ensemble de définition de (I_2) est $D_f = \mathbb{R}^*$

$$(I_2) \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq x-2$$

$$\Leftrightarrow x-2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

On dresse le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
x	-	0	+	+
$\frac{(x-1)^2}{x}$	-		+	+

Ainsi $(I_2) \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$.

Toutes les valeurs appartiennent à D_f , l'ensemble des solutions de (I_2) est $S =]0; +\infty[$.

4) Soit (I_4) l'inéquation $e^{x+3} > \frac{1}{e^x}$

$$(I_4) \Leftrightarrow e^{x+3} > e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x+3 > -x$$

$$\Leftrightarrow 2x > -3$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

l'ensemble des solutions de (I_4) est $S =]-\frac{3}{2}; +\infty[$

6) soit (I_6) l'inéquation : $e^{2x} - 2e^x - 8 < 0$

On pose $X = e^x$

$$(I_2) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2X - 8 < 0$$

Le discriminant de $X^2 - 2X - 8$ est $\Delta = 4 + 32 = 6^2$

Ainsi $X^2 - 2X - 8$ a deux racines : $X_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

La parabole est du type ∇

$$\text{Donc } (I_2) \Leftrightarrow X \in]-2; 4[$$

$$\Leftrightarrow -2 < e^x < 4$$

$$\Leftrightarrow e^x < 4 \quad \text{car } e^x > -2 \text{ est toujours vrai}$$

$$\Leftrightarrow x < \ln 4$$

L'ensemble des solutions de (I_6) est : $S =]-\infty; \ln 4[$