

TD 10 Limites - continuité

Exercice 4

1) On a: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(x) &= \frac{x^2(-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(-1 + \frac{2}{x})} \\ &= x \frac{-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{3}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{3}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit et} \\ \text{quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} -x^2 + 3x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} -x + 2 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \end{array}$$

3) Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, (6) admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

$$\begin{aligned} 4) \quad f(x) - (x-1) &= \frac{-x^2 + 3x + 1}{-x + 2} - \frac{(-x+2)(x-1)}{-x+2} \\ &= \frac{-x^2 + 3x + 1 - (-x^2 + x + 2x - 2)}{-x + 2} \\ &= \frac{-x^2 + 3x + 1 + x^2 - 3x + 2}{-x + 2} \\ &= \frac{3}{-x + 2} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x+2 = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-x+2} = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x+2} = 0$.

Ainsi la droite $(\mathcal{D})$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C})$.

5) Pour étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$, on étudie le signe de $f(x) - (x-1)$.

$$\text{Or } f(x) - (x-1) = \frac{3}{-x+2}.$$

On obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x-1)$		$+$	$-$
position relative	$(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$		$(\mathcal{C})$ est en-dessous de $(\mathcal{D})$