

TD 10 Limites et continuité.

Exercice 2

$$\left. \begin{array}{l} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 2$$

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale de (C_f)

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2 - 1} - 5 = 0.$$

La droite d'équation $y=-5$ est une asymptote horizontale de (C_f)

$$3) f(x) = \frac{2x+3}{x^2} = \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x^2} = \frac{2+\frac{3}{x}}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2} = 0$$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale de (C_f)

$$\left. \begin{array}{l} 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 - \frac{1}{x} = 2$$

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale de (C_f)

$$\begin{aligned} 5) f(x) &= \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x} = x \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} - 3 \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} - 3 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - 3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 3 = -3 \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

La droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale de (C_f)

$$6) f(x) = \frac{x^3(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = x \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit et quotient} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale en direction de $+\infty$.

$$7) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{-x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{-x}} + \frac{x}{x} = 0$$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale de (C_f) .

$$8) f(x) = \frac{x(1 + \frac{x}{\sqrt{x}})}{x\sqrt{x}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale de (C_f) .

$$9) f(x) = \frac{x(3 - \frac{5}{x})}{x^2(1 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2})} = \frac{3 - \frac{5}{x}}{x(1 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2})}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit et quotient} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale de (C_f) .

$$10) f(x) = \frac{x^3 \left(3 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{x^2 \left(3 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

par somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$$

par produit et quotient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale en direction de $+\infty$.

Exercice 3

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$ car $(x-3)^2$ est positif
donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^2} = -\infty$

La droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)^2 = 0^+$ car $(2x-1)^2$ est positif
donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{9}{(2x-1)^2} = +\infty$

La droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) Le tableau de signes de x^2-9 est :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
x^2-9		$+$	0	$-$	0
				$+$	

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2-9) = 0^+$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3}{x^2-9} = +\infty$.

La droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

4) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-2x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^2-1 = 0 \end{array} \right\}$ on ne peut pas conclure directement

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas d'asymptote verticale en $x=1$.

5) $\lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = 0^-$ car si $x < 2$ alors $x-2 < 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale de (C_f)

6) Le tableau de signes de $-2x-6$ est :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-2x-6$		$+$	$-$

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow -3^+} -2x-6 = 0^-$

Donc $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{-2x-6} = -\infty$

La droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale de (C_f)