

TD n°9 Complexes (1)

Exercice 16

$$1) \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -2 - z_1 \\ z_1 z_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -2 - z_1 \\ z_1(-2 - z_1) = 10 \end{cases}$$

Notons (E_1) l'équation : $z_1(-2 - z_1) = 10$

$$(E_1) \Leftrightarrow -2z_1 - z_1^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1 + 10 = 0$$

Le discriminant de $z_1^2 + 2z_1 + 10$ est $\Delta = 4 - 4 \times 10 = -36 = (6i)^2$

$$\text{donc } (E_1) \Leftrightarrow z_1 = \frac{-2+6i}{2} \text{ ou } z_1 = \frac{-2-6i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -1+3i \text{ ou } z_1 = -1-3i$$

$$\text{Ainsi } (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 - z_1 \\ z_1 = -1+3i \text{ ou } z_1 = -1-3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -2 - (-1+3i) \text{ et } z_1 = -1+3i \\ \text{ou} \\ z_2 = -2 - (-1-3i) \text{ et } z_1 = -1-3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1+3i \text{ et } z_2 = -1-3i \\ \text{ou} \\ z_1 = -1-3i \text{ et } z_2 = -1+3i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est :

$$S = \{(-1+3i, -1-3i); (-1-3i, -1+3i)\}$$

$$2) \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -\frac{2}{z_1} - z_1 \\ z_1(-\frac{2}{z_1} - z_1) = \frac{8}{z_1} \end{cases}$$

Notons (E_2) l'équation : $z_1(-\frac{2}{z_1} - z_1) = \frac{8}{z_1}$

$$(E_2) \Leftrightarrow -\frac{2}{z_1} - z_1^2 = \frac{8}{z_1}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 21z_1^2 + 2z_1 + 8 = 0$$

$$\text{Le discriminant de } 21z_1^2 + 2z_1 + 8 \text{ est } \Delta = 4 - 84 \times 8 = -668 = (2i\sqrt{167})^2$$

$$(E_1) \Leftrightarrow z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{167}}{42} \text{ ou } z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{167}}{42}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{167}}{21} \text{ ou } z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{167}}{21}$$

$$\text{Ainsi } (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -\frac{2}{21} - z_1 \\ z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{167}}{21} \text{ ou } z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{167}}{21} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{167}}{21} \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{167}}{21} \\ \text{ou} \\ z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{167}}{21} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{167}}{21} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_2) est :

$$S = \left\{ \left(\frac{-1 + i\sqrt{167}}{21}, \frac{-1 - i\sqrt{167}}{21} \right), \left(\frac{-1 - i\sqrt{167}}{21}, \frac{-1 + i\sqrt{167}}{21} \right) \right\}$$

Exercice 17

$$1) (z^2 + 3z + 1)(z^2 - z + 6) = z^4 - z^3 + 6z^2 + 3z^3 - 3z^2 + 18z + z^2 - z + 6 = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 17z + 6$$

$$2) \text{ Soit } (E) \text{ l'équation : } z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 17z + 6 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (z^2 + 3z + 1)(z^2 - z + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 3z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 - z + 6 = 0$$

$$\text{Le discriminant de } z^2 + 3z + 1 \text{ est } \Delta = 9 - 4 = 5 = (\sqrt{5})^2$$

$$\text{Le discriminant de } z^2 - z + 6 \text{ est } \Delta = 1 - 24 = -23 = (i\sqrt{23})^2$$

$$\text{Ainsi } (E) \Leftrightarrow z = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } z = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } z = \frac{1 + i\sqrt{23}}{2} \text{ ou } z = \frac{1 - i\sqrt{23}}{2}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est : } S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{23}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{23}}{2} \right\}$$

Exercice 18

$$\begin{aligned} 1) \quad P(i) &= i^4 - 4i^3 + 4i^2 - 4i + 3 \\ &= 1 - 4(-i) + 4(-1) - 4i + 3 \\ &= 1 + 4i - 4 - 4i + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc i est une racine de P .

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^4 - 4(-i)^3 + 4(-i)^2 + 3 - 4(-i) \\ &= i^4 + 4i^3 + 4i^2 + 3 + 4i \\ &= 1 - 4i - 4 + 3 + 4i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $-i$ est une racine de P .

2) Ainsi P est factorisable par $z-i$ et par $z+i$, donc aussi par $(z-i)(z+i)$

$$\text{Or } (z-i)(z+i) = z^2 + 1.$$

On effectue la division euclidienne de P par $z^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3 & z^2 + 1 \\ -z^4 & z^2 - 4z + 3 \\ \hline -4z^3 + 3z^2 - 4z + 3 & \\ 4z^3 & +4z \\ \hline 3z^2 & +3 \\ -3z^2 & -3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 3)$$

Le discriminant de $z^2 - 4z + 3$ est $\Delta = 16 - 12 = 4$

$z^2 - 4z + 3$ a pour racines $z_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $z_2 = \frac{4-2}{2} = 1$

Les deux autres racines de P sont 1 et 3.