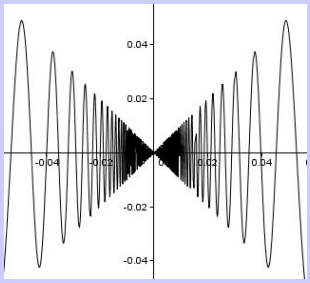
Chapitre 10 : Limites - continuité

1 Limite d'une fonction

Définition 1 : limite d'une fonction

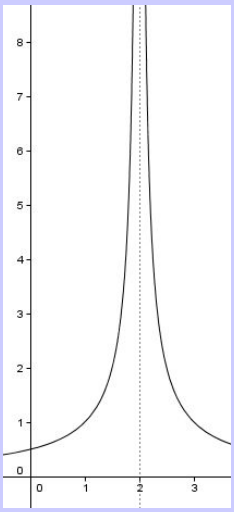
Soit f une fonction réelle.

– On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition que x soit suffisamment proche de a.

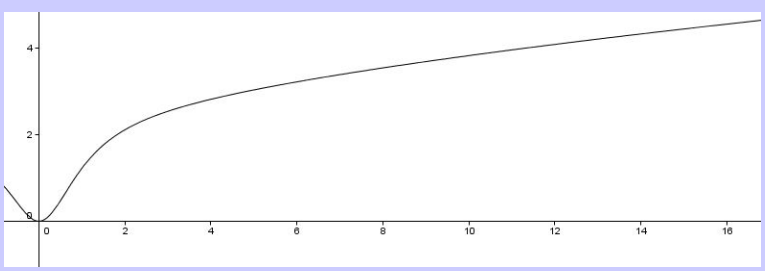


– On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition que x soit suffisamment grand.

– On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a.

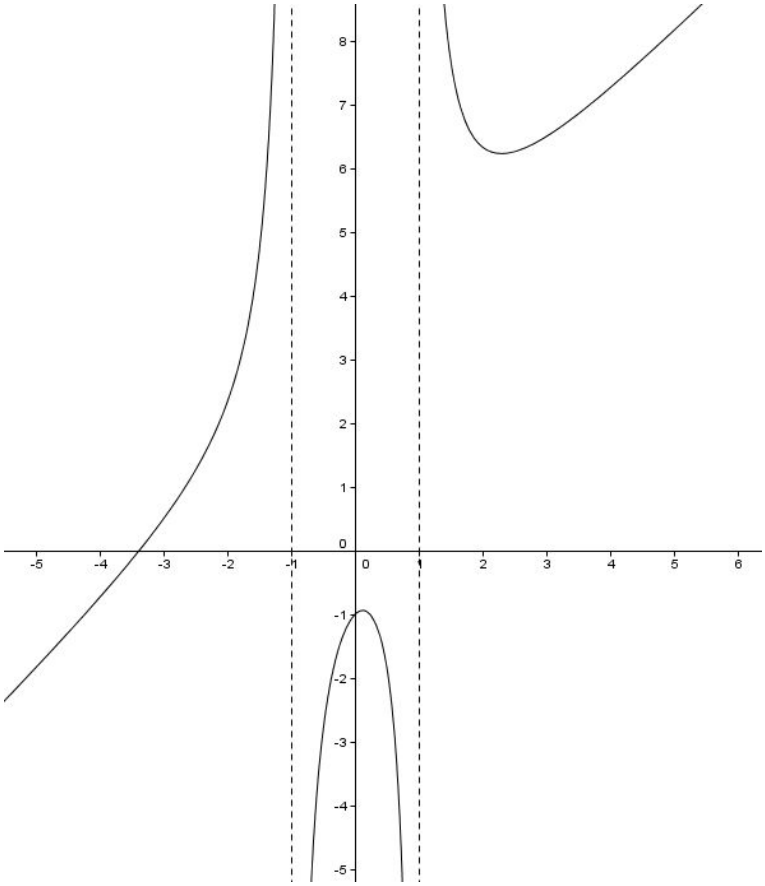


– On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

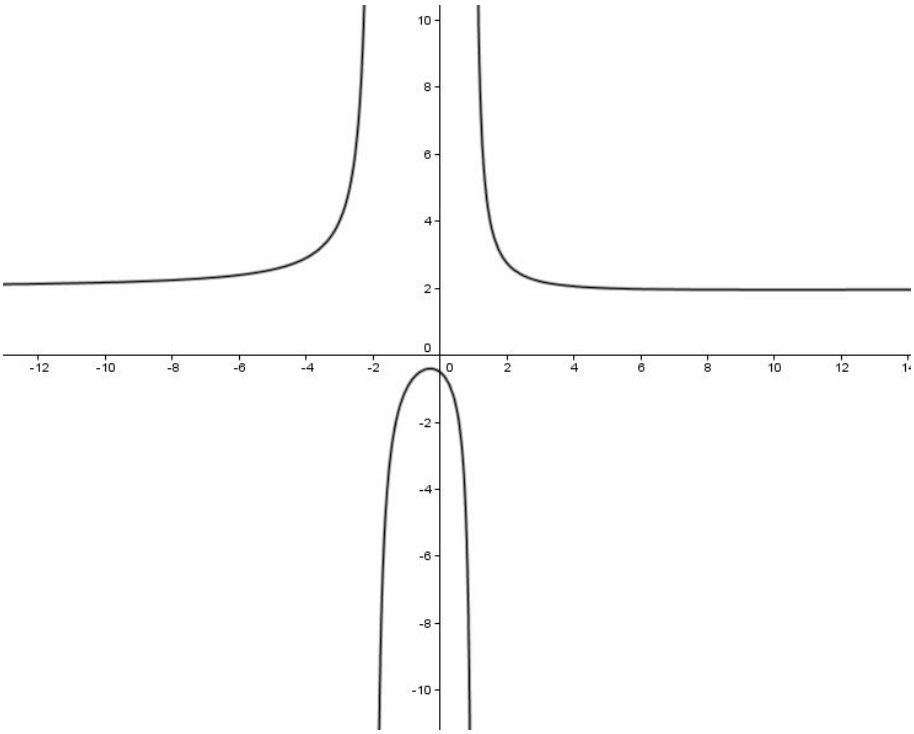


Exemple 1
Déterminer l'ensemble de définition et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition dans chacun des deux cas suivants :

1. Soit f la fonction définie par la courbe ci-dessous :



2. Même question avec la courbe ci-dessous :



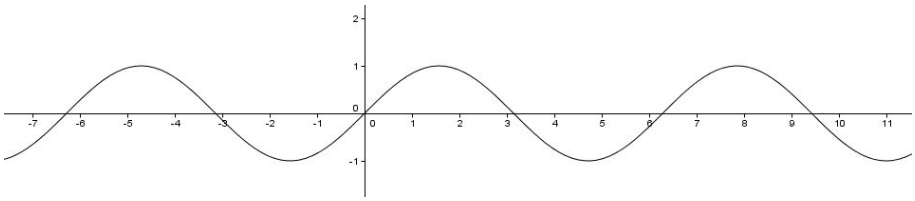
Propriété 1 : limites usuelles

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

3. Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
4. Si $n \in \mathbb{N}$ et est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
5. Si $n \in \mathbb{N}$ et est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Remarque
Certaines fonctions n'admettent aucune limite en $+\infty$ ou en $-\infty$: les fonctions cosinus et sinus par exemple.



Propriété 2 : limite d'une somme

limite de f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Remarque
Il ne faut pas essayer d'apprendre par cœur ce tableau. Il suffit de se représenter la situation. Pour déterminer la limite d'une somme, on utilise le tableau qui permet de conclure directement sauf en cas de forme indéterminée. On doit alors souvent modifier l'expression de la somme pour conclure.

Exemple 2
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2+1-x^3+5x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} 3x^4-5x^2+7$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3+x^2+\dfrac{2}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2-5x+\dfrac{4}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3-x^2+\dfrac{2}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3+x^2+\dfrac{2}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2-\dfrac{1}{x^2}+x^4$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2-\dfrac{1}{x^2}+x^4$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3+x^2+2$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3-2x^2+5$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}+3x$
12. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1}-x+1$

Propriété 3 : limite d'un produit

limite de f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
limite de g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
limite de $f\times g$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Remarque
Il ne faut pas essayer d'apprendre par cœur ce tableau. Il suffit de se représenter la situation. Pour déterminer la limite d'un produit, on utilise le tableau qui permet de conclure directement sauf en cas de forme indéterminée. On doit alors souvent modifier l'expression du produit pour conclure.

Exemple 3
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3x-\dfrac{1}{4x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}\right)(3x+2)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} 4x^2+2x+7$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^2-5x+3$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3x-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(3+\dfrac{5}{x}\right)\left(4x^2-\dfrac{1}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2+x)\left(x^2+x\right)$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2+x)\left(3x^2-x\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 0} (2+x)\left(x^2+x\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^3-x\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^3-x\right)\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3-x\right)\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Propriété 4 : limite d'un quotient

Si la limite de g est différente de 0 :

limite de f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
limite de g	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Si la limite de g est égale à 0 :

limite de f	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
limite de g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
limite de $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Remarque
Il ne faut pas essayer d'apprendre par cœur ce tableau. Il suffit de se représenter la situation. Pour déterminer la limite d'un quotient, on utilise le tableau qui permet de conclure directement sauf en cas de forme indéterminée. On doit alors souvent modifier l'expression du quotient pour conclure.

Exemple 4
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{2-\sqrt{\frac{1}{x^2}}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x}{3+\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{-2+\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{x^3+x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-3}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}}{2x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+1}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-3x+1}{(x-1)^2}$
10. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$
11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{-2x^2+2x+12}$

Propriété 5 : limite de fonctions composées

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.
Soit $a \in I$, et $b \in J$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$.
Alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$.

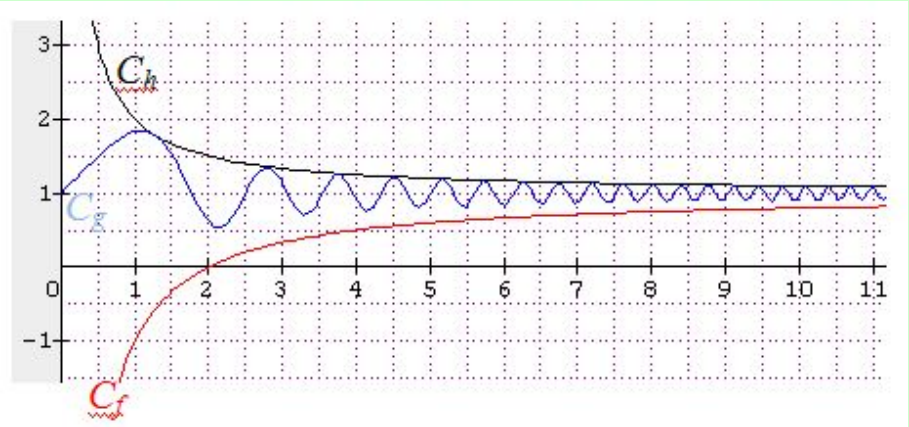
Remarque
La propriété reste vraie si a, b ou c "sont infinis".

Exemple 5
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(3x^2-2x+2\right)^3$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Propriété 6 : théorème d'encadrement ou dit des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions réelles et $b\in\mathbb{R}$.
- Si, pour tout x suffisamment grand, on a $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=b$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$.
- Si, pour tout x suffisamment grand, on a $g(x)\leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.
- Si, pour tout x suffisamment grand, on a $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.



Exemple 6
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2+\cos 5x+x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sin(2x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2 Asymptote

Définition 2 : asymptote horizontale

Soit f une fonction réelle. Soit b un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) alors on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en direction de $+\infty$ (resp en direction de $-\infty$).

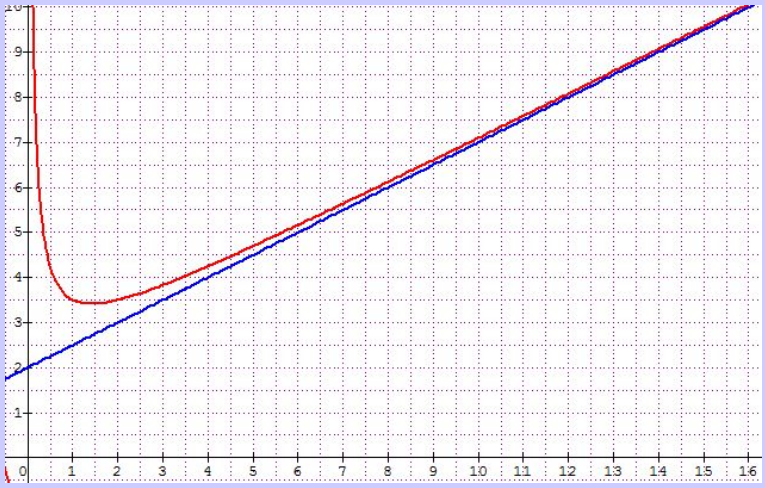
Interprétation graphique :

Définition 3 : asymptote verticale

Soit f une fonction réelle définie pour x proche de a.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Définition 4 : asymptote oblique

Soit f une fonction réelle , et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(\alpha x+\beta)=0$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(\alpha x+\beta)=0$) alors on dit que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=\alpha x+\beta$ en direction de $+\infty$ (resp en direction de $-\infty$).



Exemple 7

1. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3-2x^2}{x+x^2}$ admet une asymptote horizontale en direction de $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{-1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}}$ admet une asymptote horizontale en direction de $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-4}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=4$.
4. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{5-x}{x+x^2}$ admet deux asymptotes verticales dont on déterminera les équations.
5. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-7}{3x+4}$ admet une asymptote oblique d'équation $y=x-2$ en direction de $+\infty$ et $-\infty$.
6. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-7x+3}{1-x^2}$ admet une asymptote oblique d'équation $y=-2x+3$ en direction de $+\infty$ et $-\infty$.

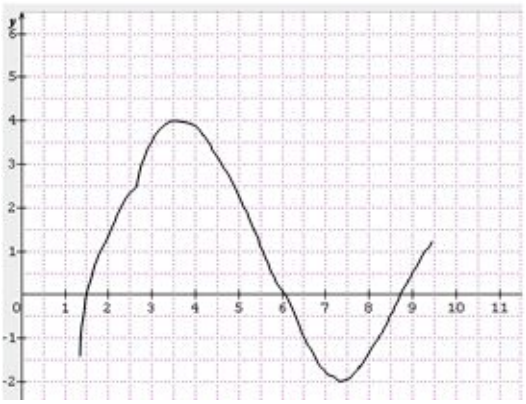
3 Fonctions continues

Définition 5 : fonction continue en un point

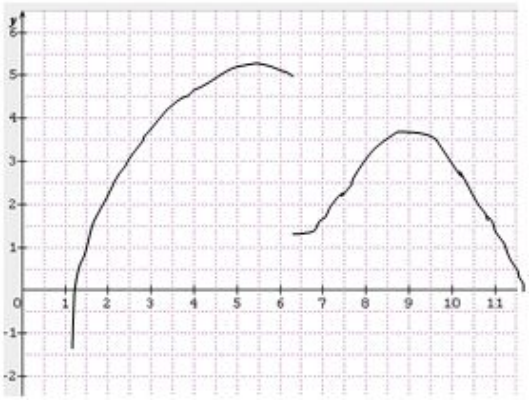
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$.
On dit que f est continue en $\alpha \in]a,b[$ si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$

Remarque
La continuité d'une fonction se traduit de façon très intuitive sur la courbe représentative de la fonction de la manière suivante :
On peut la construire sans lever le crayon.

Interprétation graphique :



f est continue sur $[a,b]$



f n'est pas continue sur $[a,b]$

Exemple 8

1. Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} \text{ pour } x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

est continue en 1.

2. Montrer que la fonction g définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+x-2}{x-1} \text{ pour } x \neq 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

est continue en 1.

3. Déterminer le réel a pour que la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2+x-1 \text{ pour } x \geqslant 0 \\ f(x) = x+a \text{ pour} x < 0 \end{cases}$$

soit continue en 0.

4. Déterminer le réel a pour que la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2+ax-1 \text{ pour } x \geqslant 2 \\ f(x) = 5x+1 \text{ pour} x < 2 \end{cases}$$

soit continue en 2.

Propriété 7 : image d'un intervalle par une fonction continue

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 9
On considère une fonction f définie et continue sur $[-3\,;\,3]$ dont le tableau de variation est :

x	-3		-1		0		1		2		3
$f(x)$	3	↘	1	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	-1

Déterminer par f les images des intervalles suivants :

1. $I_1 = [-3\,;3]$
2. $I_2 = [0\,;2]$
3. $I_3 = [-1\,;2]$
4. $I_4 =]0\,;\,3]$
5. $I_5 =]-1\,;\,1[$
6. $I_6 = [-1\,;\,3[$

Exemple 10
Dans chaque cas, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f(x) = 3x+2$ et $I = [-2\,,\,5]$
2. $f(x) = -2x+4$ et $I = [0\,,\,4]$
3. $f(x) = x^2+1$ et $I = [-4\,,\,2]$
4. $f(x) = (x-2)^2+5$ et $I = [-3\,;\,4]$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$ et $I = [-4,4]$

Propriété 8 : continuité et fonctions usuelles

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes), la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions sinus et cosinus sont continues en tout point où elles sont définies.

Propriété 9 : continuité et opérations sur les fonctions

La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues est continue en un point où elle est définie.

Exemple 11
Représenter graphiquement les trois fonctions définies ci-dessous, utiliser le graphique pour conjecturer leur continuité et démontrer la conjecture.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x \text{ si } x \leqslant -2 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x \text{ si } x > -2 \end{cases}.$$

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}.$$

Un peu d'histoire

Euler, Cauchy et les débuts de l'analyse

Le concept de variable est depuis très longtemps présent dans l'esprit de l'homme. Ceci est lié à la réalité physique dans laquelle on vit : une variable s'assimile très facilement au mouvement d'un objet dans l'espace, à la fluctuation d'une température ou de n'importe quelle autre grandeur physique. Ainsi, dans ses travaux sur le calcul infinitésimal, Newton (1642 - 1727) parle de fluctuations de quantités, et non pas de fonctions. La formalisation de cette notion est inconnue à l'époque.

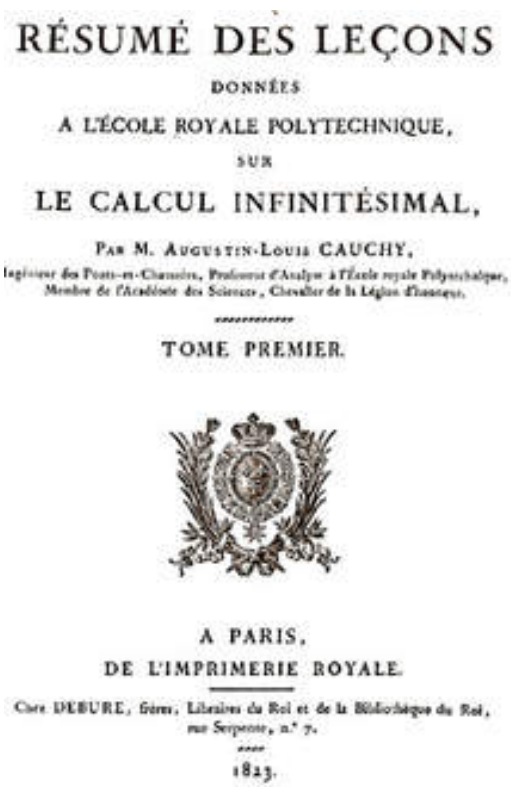
C'est Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse, et l'un des scientifiques les plus féconds de l'histoire, qui donne pour la première fois la définition de fonction comme un mécanisme qui à un nombre associe un autre, par le biais d'une expression qu'il note $f(x)$. Par son usage systématique des fonctions, Euler est considéré le fondateur de l'analyse, la branche des mathématiques consacrée à l'étude des propriétés des fonctions.

Leonard Euler

L'introduction des fonctions dévoile un vaste champ de travail pour les mathématiciens du XVIIIème et du XIXème siècle, mais pose aussi de nombreuses questions qui restent sans résoudre. Pour la première fois, il faut comprendre ce que veut dire rigoureusement « faire varier une quantité ». Si faire varier une quantité entière est simple (il suffit de « sauter » d'un entier au suivant ou au précédent selon ce qu'on veut), faire de même avec des nombres réels ne l'est pas, car il n'y a pas « de nombre suivant ». Une question fondamentale que les mathématiciens ne se sont jamais posé est sous-jacente : que sont les nombres réels ? Quel sens donner à des quantités comme p, qui ne peuvent être représentées ni comme une fraction ni comme un nombre avec des décimales en quantité finie, dont la seule « représentation » possible est le symbole p ?

Ces questions sont gênantes et, à priori, peu productives. Les mathématiciens décident donc le plus souvent de faire comme si elles n'existaient pas. Les « démonstrations graphiques » abondent, de même que les « évidences ». Cauchy prétend démontrer de la façon suivante qu'une fonction continue qui prend des signes opposés s'annule, dans un pur exercice de reformulation de la consigne :

« La fonction f étant continue entre les points $x-0$ et x, la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ sera continue entre les points $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$ et la droite d'équation $y=0$ qui passera entre les ordonnées $f(x_0)$ et $f(x)$ ne peut que rencontrer dans l'intervalle la courbe mentionnée. »


RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1823.

Couverture du Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique de Cauchy

Cauchy et ses contemporains réussissent tout de même à donner des définitions cohérentes de la continuité, proches de celles que l'on utilise aujourd'hui :
f est continue en x si la valeur numérique de la différence $f(x+h)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de a » - Extrait du cours de Cauchy à l'École Polytechnique

L'apparition des limites

Le développement de l'analyse est très rapide au cours du XVIIIème et du XIXème siècle. Les quelques obstacles qui se présentent sont omis : une stratégie peu honnête mais très productive. Cependant, de plus en plus de mathématiciens réclament une révision à fond des fondements des mathématiques. Cette tendance, qui vise à vérifier que les bases de l'édifice sont solides avant que celui-ci ne soit trop important, est suivie par certains des plus grands : Bernard Bolzano (allemand, 1781 - 1848), Richard Dedekind (allemand, 1831 - 1916) et plus tard David Hilbert (allemand, 1862 - 1943), ainsi que bien d'autres. C'est ainsi que Dedekind propose une construction rigoureuse de celle qui pour les anciens était la plus grande des « évidences » : l'existence des nombres réels.

Bernhard Bolzano

La compréhension de ce que sont les nombres réels aboutit à la définition d'un concept incontournable pour parler de continuité : les limites. Bolzano est le premier à en donner une définition, qui passe cependant inaperçue. Les publications de Karl Weierstrass (allemand, 1815 - 1897) sont finalement celles retenues par la communauté mathématicienne. Sa définition, comme celle de Bolzano, est basée sur une alternative rigoureuse et efficace aux « fluctuations de quantités » dont parlait Cauchy. Ce nouveau type de raisonnement est le raisonnement en δ, ϵ. C'est aussi à cette occasion que sont introduites les notations actuelles pour les limites. Avec les travaux de Weierstrass, on voit aussi apparaître, enfin, la définition rigoureuse des dérivées et des primitives, que l'on utilise encore de nos jours. Les limites ne sont pas seulement une formalisation rigoureuse de notions déjà connues. Elles permettent aussi aux mathématiciens de prendre du recul et d'envisager des généralisations des théorèmes existants : c'est la naissance de la topologie, une branche des mathématiques qui étudie les propriétés de continuité sur des ensembles beaucoup plus généraux que les réels, et qui a depuis eu un grand impact sur à peu près tous les domaines, de l'algèbre aux probabilités.

Karl Weierstrass

David Hilbert