

Éléments de logique

Un mathématicien, un physicien et un ingénieur voyagent à travers l'Écosse et voient un mouton noir par la fenêtre du train.

"Aha," dit l'ingénieur, "Je vois que les moutons écossais sont noirs."

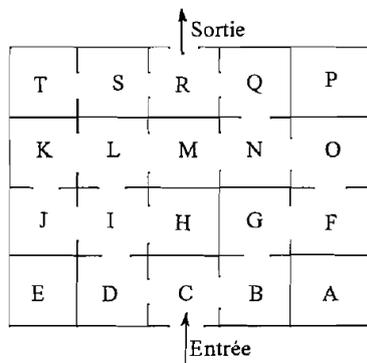
"Hmm," dit le physicien, "Tu veux dire que certains moutons écossais sont noirs"

"Non," dit le mathématicien, "Tout ce qu'on sait est qu'il y a au moins un mouton en Écosse, et qu'au moins un côté de ce mouton est noir!"

Exercice 1

On considère le labyrinthe ci-dessous. Les pièces sont nommées A, B, C, ..., T comme il est indiqué sur la figure.

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble de tous les trajets allant de l'entrée à la sortie sans jamais passer deux fois par la même porte.



1. On considère la phrase n°1 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . X passe par P".
Étudier la véracité de cette phrase.
2. Même question avec la phrase n°2 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . X passe par N".
3. Même question avec la phrase n°3 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . X passe par M".
4. Même question avec la phrase n°4 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . Si X passe par O, alors X passe par F".
5. Même question avec la phrase n°5 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . Si X passe par K, alors X passe par L".
6. Même question avec la phrase n°6 :
"Soit X un élément donné de \mathcal{E} . Si X passe par L, alors X passe par K".
7. Même question avec la phrase n°7 :
"Pour tout élément X de \mathcal{E} , X passe par P".
8. Même question avec la phrase n°8 :
"Pour tout élément X de \mathcal{E} , X passe par N".
9. Même question avec la phrase n°9 :
"Pour tout élément X de \mathcal{E} , X passe par M".
10. Même question avec la phrase n°10 :
"Pour tout élément X de \mathcal{E} , si X passe par O, alors X passe par F".

11. Même question avec la phrase n°11 :

"Pour tout élément X de \mathcal{E} , si X passe par K , alors X passe par L ".

12. Même question avec la phrase n°12 :

"Pour tout élément X de \mathcal{E} , si X passe par L , alors X passe par K ".

Exercice 2

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 3

1. Soit f une fonction donnée définie sur $[-4;3]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4	-1	0	3
$f(x)$	1	-1	1	-4

Etudier la véracité des propositions suivantes :

- a. L'image par f de 1 est 0.
 - b. L'image par f de 1 est -4 .
 - c. L'image par f de -4 est 1.
 - d. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent par f .
 - e. Le nombre 1 a deux antécédents par f .
 - f. Le nombre $f(2,5)$ est négatif.
2. On considère \mathcal{E} l'ensemble de toutes les fonctions définies $[-4;3]$ dont le tableau de variations est celui présenté précédemment.

Etudier la véracité des propositions suivantes :

- a. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , l'image par f de 1 est 0.
- b. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , l'image par f de 1 est -4 .
- c. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , l'image par f de -4 est 1.
- d. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , le nombre 0 n'a pas d'antécédent par f .
- e. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , le nombre 1 a deux antécédents par f .
- f. Pour toute fonction f de \mathcal{E} , le nombre $f(2,5)$ est négatif.

Exercice 4

Une proposition est une phrase pour laquelle on peut décider sans ambiguïté qu'elle est vraie ou fausse. Déterminer parmi les énoncés ci-dessous ceux qui sont des propositions.

1. "33 est le triple de 11"
2. "Le périmètre du rectangle ABCD"
3. "La moitié de 19 n'est pas égale à 8"
4. " $\frac{586}{4}$ "
5. " $6 \times 8 = 54$ "
6. "La longueur du segment [AB]"
7. "[AB]=5 cm"
8. "Une diagonale du quadrilatère ABCD"
9. " $4,78 < 5,18$ "
10. "Le triple de 34"
11. "Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ "
12. "Pour tous points A, B et C , $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ "
13. "La mesure de l'angle \widehat{ABC} "
14. " $5(x+3)^2 - 8(x+3)$ "
15. " $2 + 5 = 8$ "
16. "Le milieu de la droite (AB) est le point I ."
17. "Le quart de cinq"
18. " $8x + 3 = 5x - 2$ "
19. "Il existe un nombre x réel tel que $x^2 < 0$ "
20. " $(4x + 5)^3$ "
21. "E est le symétrique de A par rapport à B"
22. "La distance de A à la droite (D)"

Exercice 5

Écrire les négations des propositions suivantes.

1. Tous les étudiants de TS11 sont des garçons.
2. Tous les nombres réels sont positifs.
3. Le triangle ABC est rectangle ou isocèle.
4. 2 est la solution de l'équation (E) .
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 6$
6. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 5$ ou $x < -5$
7. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > -3$ et $x < 3$
8. Tous les quadrilatères de l'ensemble E sont des carrés.
9. Tous les quadrilatères de l'ensemble E ont les diagonales perpendiculaires ou de même longueur.
10. Tous les quadrilatères de l'ensemble E ont les diagonales perpendiculaires et de même longueur.
11. Il existe un quadrilatère de l'ensemble E qui a ses diagonales perpendiculaires.

12. Il existe un quadrilatère de l'ensemble E qui a ses diagonales perpendiculaires ou de même longueur.
13. Il existe un quadrilatère de l'ensemble E qui a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
14. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.

Exercice 6

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carré et triangulaire) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge). Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois affirmations sur ces pièces :

1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert

Déterminer la couleur de chaque jeton.

Exercice 7

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou non :

1. Pour tout x réel, si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$
2. Pour tout x réel, si $x = 1$ alors $(x - 1)(x - 2) = 0$.
3. Pour tout x réel, si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.
4. Pour tout x réel, si $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ alors $(x - 1)(x - 2) = 0$.
5. Pour toute droite (D) du plan, si (D) a pour équation $y = 2x - 7$ alors (D) passe par le point $A(5 ; 3)$.
6. Pour toute droite (D) du plan, si (D) passe par le point $A(5 ; 3)$ alors (D) a pour équation $y = 2x - 7$.
7. Pour tout x réel, si $x = 2$ alors $x^2 = 4$.
8. Pour tout x réel, si $x < 2$ alors $x^2 < 4$.
9. Pour tout x réel positif, si $x < 2$ alors $x^2 < 4$.
10. Pour tout x réel, si $x^2 < 4$ alors $x < 2$ ou $x < -2$.
11. Pour tout x réel, si $x^2 < 4$ alors $x < 2$ et $x < -2$.
12. Pour tout x réel, si $x^2 < 4$ alors $x < 2$ ou $x > -2$.
13. Pour tout x réel, si $x^2 < 4$ alors $x < 2$ et $x > -2$.

Exercice 8

Voici une liste de 13 affirmations qui sont toutes fausses numérotées de 1 à 13 accompagnées de trois exemples codés R1, R2 et R3. Déterminer parmi-ceux-ci, celui qui est un contre-exemple.

1. "Si un nombre est divisible par 2, alors il, est divisible par 4."

R1 : 6

R2 : 8

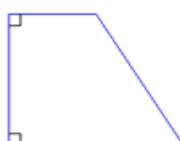
R3 : 15

2. "Un quadrilatère ayant deux angles droits opposés est un rectangle."

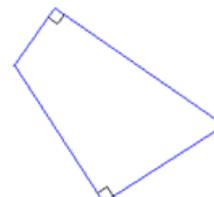
R1



R2



R3



3. "Pour tous nombres a et b positifs, on a : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$."

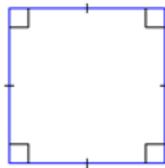
$$R1 : \begin{cases} a = -9 \\ b = 16 \end{cases}$$

$$R2 : \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

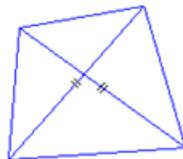
$$R3 : \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases}$$

4. "Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle."

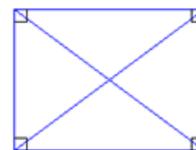
R1



R2



R3



5. "Pour tous nombres a et b , on a : $(a+b)^2 = a^2 + b^2$."

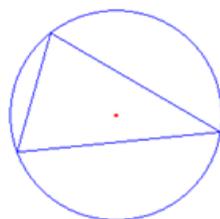
$$R1 : \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$R2 : \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

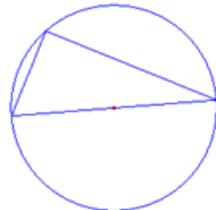
$$R3 : \begin{cases} a = 9 \\ b = 0 \end{cases}$$

6. "Si un triangle est inscrit dans un cercle, alors il est rectangle."

R1



R2



R3



7. "Pour tous nombres a, b et c tels que $b+c$ et b soient non nuls, on a : $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$."

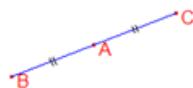
$$R1 : \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$R2 : \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$R3 : \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

8. "Si $AB = AC$, alors A est le milieu de $[BC]$."

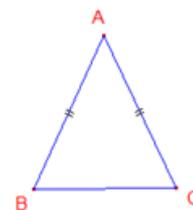
R1



R2



R3



9. "Le produit ab de deux nombres a et b est supérieur à chacun des deux nombres a et b ."

$$R1 : \begin{cases} a = 0,2 \\ b = 0,01 \end{cases}$$

$$R2 : \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$R3 : \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

10. "Toute fonction affine est linéaire."

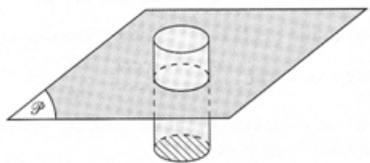
$$R1 f(x) = 3x + 4$$

$$R2 f(x) = -4x^2 + 3$$

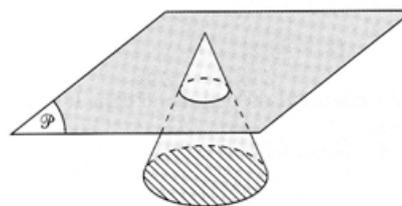
$$R3 f(x) = \frac{5}{4}x$$

11. "La section d'un cône par un plan est toujours un cercle".

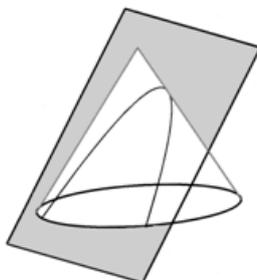
R1



R2



R3



12. " $-x$ est toujours un nombre négatif"

R1 $x = 2,1$

R2 $x = -3,5$

R3 $x = \sqrt{2}$

13. "Le carré d'un nombre positif est toujours supérieur ou égal à ce nombre"

R1 $x = 1$

R2 $x = \sqrt{2}$

R3 $x = \frac{1}{2}$

Exercice 9

Les affirmations suivantes sont fausses.

Trouver, dans chaque cas, le ou les contre-exemple(s) qui le prouve(nt).

1. "Pour $a > 0, a \leq a^2 \leq a^3$ "

- A) $a = -\frac{1}{2}$ B) $a = \frac{1}{2}$ C) $a = 2$ D) $a = -2$ E) $a = 1$ F) $a = 0$

2. "Si $xy = 1$, alors $x = 1$ ou $y = 1$."

- A) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ E) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ F) $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$

3. "Si $(2x+3)(4x+5) \geq 0$, alors $2x+3 \geq 0$ ou $4x+5 \geq 0$ ".

- A) $x = 1$ B) $x = 0$ C) $x = -2$ D) $x = -\frac{5}{4}$ E) $x = 2$ F) $x = -\frac{11}{8}$

4. "Si $x < 3$, alors $x^2 < 9$ "

- A) $x = 4$ B) $x = 2$ C) $x = 0$ D) $x = -2$ E) $x = -4$ F) $x = -3$

5. "Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ "

- A) $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ D) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ E) $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ F) $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

6. " $\sqrt{-x}$ n'existe jamais"

- A) $x = 2$ B) $x = 1$ C) $x = 0$ D) $x = -\frac{1}{2}$ E) $x = -1$ F) $x = -7$

7. " $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ "

- A) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$ B) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ E) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ F) $\begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}$

8. " n est un entier, \sqrt{n} n'est pas un entier"

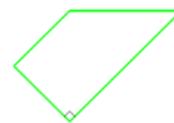
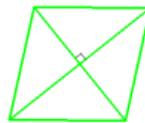
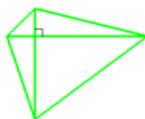
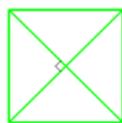
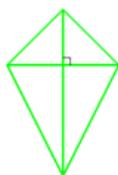
- A) $n = 2$ B) $n = 1$ C) $n = 0$ D) $n = 121$ E) $n = 7$ F) $n = -9$

9. "La fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante sur \mathbb{R} "

- A) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$ B) $\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$ C) $\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$ E) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ F) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$

10. "Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange"

- A) B) C) D) E)



Exercice 10

Compléter les phrases suivantes à l'aide des mots "car" ou "donc".

- $ABCD$ est un parallélogramme (AB) et (CD) sont parallèles.
- $ABCD$ est un parallélogramme [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.
- Le nombre a est supérieur à 3, il est supérieur à 2.
- Le quadrilatère a deux angles droits, c'est un rectangle.
- L'entier n est divisible par 9, il est divisible par 3.
- Le triangle ABC est équilatéral, il est isocèle.
- Les points A, B et C sont alignés, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
- $y^2 = 9$ $y = 3$.
- $x \in [-1; 4]$ $x \in [-2; 5]$.
- $x^2 > 9$ $x > 3$

Exercice 11

Énoncer plus simplement les propositions suivantes :

1. Ce triangle est équilatéral et isocèle.
2. Ce triangle est équilatéral ou isocèle.
3. Ce quadrilatère est un rectangle et un carré.
4. Ce quadrilatère est un rectangle et un losange.
5. Ce quadrilatère est un parallélogramme ou un losange.
6. Ce quadrilatère est un trapèze et un parallélogramme.
7. Ce quadrilatère est un rectangle ou un carré.
8. Ce nombre entier est pair ou son chiffre des unités est 4.

Exercice 12

Soit T l'ensemble des triangles du plan.

On considère les propositions suivantes :

1. Tous les triangles sont isocèles.
2. Tous les triangles sont non isocèles.
3. Aucun triangle n'est isocèle.
4. Aucun triangle n'est non isocèle.
5. Il existe au moins un triangle isocèle.
6. Il existe au moins un triangle non isocèle.

Trouver les relations logiques pouvant exister entre ces propositions.

Exercice 13

1. Voici une liste de six propriétés :

Dans l'ensemble des quadrilatères :

- a) avoir quatre angles droits
- b) être un carré
- c) être un losange
- d) avoir un angle droit
- e) avoir deux côtés consécutifs de même longueur
- f) être un rectangle.

Déterminer tous les liens d'implication (du type " si ... alors ") entre ces six propriétés.

2. Même question avec les six propriétés suivantes :

- a) $x^2 = 16$
- b) $x = 4$
- c) $x = 4$ ou $x = -4$
- d) $x = -4$
- e) $x^3 = 64$
- f) $|x| = 4$

3. Même question avec les dix propriétés suivantes :

- a) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires
- b) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont opposés
- c) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont même direction
- d) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux

- e) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont le même sens
- f) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont la même norme
- g) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont de sens contraire
- h) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- i) $ABCD$ est un parallélogramme

4. Même question avec les dix propriétés suivantes :

- a) $x^2 \leq 25$
- b) $x \leq 5$
- c) $(x-5)(x-5) \leq 0$
- d) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$
- e) $x \geq -5$
- f) $(x-5)(x+5) \leq 0$
- g) $x \leq 5$ ou $x \leq -5$
- h) $x^3 \leq 125$
- i) $x \leq 5$ et $x \geq -5$
- j) $x \leq 5$ ou $x \geq -5$

Exercice 14

Étudier la véracité de chacune des propositions suivantes (on justifiera avec soin la réponse).

1. Soit ABC un triangle rectangle en B . La médiatrice du segment $[AC]$ passe par B .
2. Soit ABC un triangle rectangle en A . Le point A est l'orthocentre de ABC .
3. Un quadrilatère convexe ayant un angle droit est un rectangle.
4. Un triangle avec un angle de 60° est équilatéral.
5. Pour tout x réel, $(x-1)(x+2) = x^2 - x - 2$.
6. Pour $x = 0$, $(x-1)(x+2) = x^2 - x - 2$.
7. Pour tout x réel, $\sqrt{x^2} = x$.
8. Un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.
9. Un nombre divisible par 2 est divisible par 4.
10. Une fonction linéaire est une fonction affine.
11. Un quadrilatère convexe ayant deux angles droits est un rectangle.
12. Si n est un entier naturel, n est toujours irrationnel.
13. Un multiple de 4 est un multiple de 2.
14. Trois points quelconques du plan appartiennent à un même cercle.
15. La courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ est toujours située au dessus de l'axe (Ox) .
16. L'équation $3x + 7 = 0$ a une solution dans \mathbb{Z} .
17. Si $AI = IB$, alors I est le milieu de $[AB]$.
18. Si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires, alors les points A, B, C et D sont alignés.
19. Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les points A, B, C et D sont coplanaires.
20. Une droite de coefficient directeur nul est la représentation graphique d'une fonction constante.
21. Un cercle est la représentation graphique d'une fonction.

Exercice 15

Pour chaque implication du type (A) \implies (B), déterminer un ensemble sur lequel elle est vraie.

1. (A) $x^2 = 4$ $x = 2$
2. (A) $x^3 = 64$ $x = 4$
3. (A) $x^2 < 1$ $x < 1$
4. (A) $x = y$ $x^2 = y^2$
5. (A) $x^3 > 8$ $x > 2$
6. (A) $\frac{1}{x} < 2$ $x > \frac{1}{2}$
7. (A) $x < y$ $x^2 > y^2$
8. (A) $\frac{1}{x} > -3$ $x < -\frac{1}{3}$
9. (A) $x^2 > 4$ $x < -2$

Exercice 16

Les cannibales d'une tribu qui se préparent à manger un missionnaire lui permettent une dernière déclaration. si elle est vraie, il sera rôti. Si elle est fausse, il sera bouilli.

Que doit déclarer le missionnaire si on suppose les cannibales sensibles aux charmes de la logique ?

Exercice 17

Pour chacune des phrases ci-dessous, dire si celle-ci est vraie ou non.

1. Il existe x réel tel que pour tout y réel, on ait : $x^2 + y^2 > 0$.
2. Pour tout x réel et tout y réel, $x^2 + y^2 \geq 0$

Exercice 18

On dispose de six boules, dont trois en bois (une blanche, une rouge et une noire) et trois en matière plastique (une blanche, une rouge et une noire).

On dispose aussi d'une boîte dans laquelle on peut mettre certaines de ces boules ou la totalité de ces boules. Dans chacun des cas suivants, rechercher toutes les façons de choisir les boules, pour les mettre dans la boîte, de manière que la consigne soit respectée.

1. Si une boule est en bois, alors elle est blanche.
2. Si une boule est blanche, alors elle est en bois.
3. S'il y a une boule en bois, alors il y a une boule blanche.
4. Si une boule est rouge ou blanche, alors elle est en bois.
5. Une boule est blanche si et seulement si elle est en bois.
6. Il y a une boule blanche si et seulement si il y a des boules en bois.
7. S'il y a une boule blanche, alors toutes les boules sont en bois.
8. Si toutes les boules sont rouges ou noires, alors il n'y a aucune boule en bois.