Chapitre 11 : La fonction exponentielle

1 Définitions et premières propriétés

Définition et propriété 1 : fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie :

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$
2. $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle, notée exp

Propriété 2 : fonction exponentielle et opérations

Soit x et y deux nombres réels. On a :

1. $\exp(x+y) = \exp x \times \exp y$
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$
3. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

Propriété 3 : signe et monotonie

1. La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$
2. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

Définition 2 : le nombre e

Le nombre $\exp 1$ est noté e. Le nombre e est irrationnel (admis), et une valeur approchée au millième de e est 2,718.

Notation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\exp x = e^x$

Remarque

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n)=e^n$
De même, on peut montrer que : pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\exp(m)=e^m$ et pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\exp(q)= e^q$.
On prolonge cette notation à $x \in \mathbb{R}$ en écrivant :

$$\exp(x) = e^x.$$

Propriété 4 : propriétés algébriques de l'exponentielle

1. $e^0 = 1$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^x)' = e^x$
4. Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{x+y} = e^x.e^y$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
6. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Exemple 1
Simplifier l'écriture des nombres ou expressions suivants :

1. $A = e^3\sqrt{e}$
2. $B = \dfrac{e^2}{\sqrt{e}}$
3. $C = (e^x)^5 \times e^{-2x}$
4. $D = \dfrac{e^{2x+5}}{e^{2x-1}}$
5. $E = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
6. $G = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

Exemple 2
Vérifier les égalités suivantes :

1. $\dfrac{e^{-x}}{e^x+1} = \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$
2. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
3. $\dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{3}{e^x+1}$
4. $\dfrac{e^x}{e^x - x} = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$

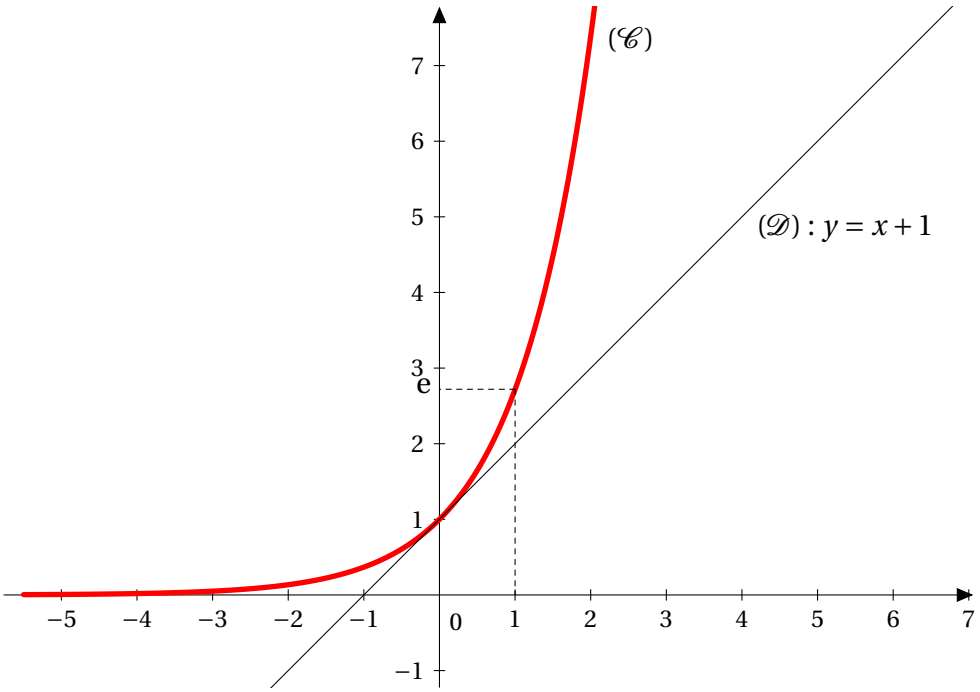
2 Limites, variations et courbe

Propriété 5 : limites en $+\infty$ et $-\infty$

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
exp'(x)		$+$	
$\exp(x)$	0	↗	$+\infty$



3 Équations et inéquations

Propriété 6 : égalités et inégalités

Pour tous réels a et b, on a : $e^a = e^b \iff a = b$
Pour tous réels a et b, on a : $e^a < e^b \iff a < b$

Propriété 7 : logarithme neperien

Pour tout $m > 0$, l'équation $e^x = m$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.
Ce nombre est noté $\ln m$ et se lit logarithme népérien de m.
Ainsi, si $m > 0$: $e^x = m \iff x = \ln m$ et $e^{\ln m} = m$

Exemple 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-x^2} = e^{2x+1}$
2. $e^{x^2} = e^{5x-4}$
3. $e^x - e^{-x} = 0$
4. $(e^x - e)\left(e^{3x} + 5\right) = 0$
5. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
6. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Exemple 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{-x} \leq e^x$
2. $e^{-\frac{1}{x}} \leq e^{x-2}$
3. $e^{-x^2-x} \leq 1$
4. $e^{x+3} > \dfrac{1}{e^x}$
5. $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$
6. $e^{2x} - 2e^x - 8 < 0$

4 Limites et croissances comparées

Propriété 8 : croissances comparées

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$

Exemple 5
Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^x + 5x - 4$
2. $f(x) = (2x-3)(1-\mathrm{e}^{-x})$
3. $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + x$
4. $f(x) = x + 3 + x\mathrm{e}^x$
5. $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}$
7. $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x}$
8. $f(x) = \dfrac{x-5}{\mathrm{e}^x + 1}$

Propriété 9 : une limite en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Exemple 6
Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}$
2. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{3x}$
3. $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^x}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^x}{2x}$
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$

5 Dérivée d'une composée

Propriété 10 : dérivée d'une composée

Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\exp \circ u = \mathrm{e}^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$

Exemple 7
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (3x-2)\mathrm{e}^x$
2. $f_2(x) = (4x^2-2x+3)\mathrm{e}^x$
3. $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{8\mathrm{e}^x+1}$
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-3}$
6. $f_6(x) = \mathrm{e}^{3x^2-1}$
7. $f_7(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$
8. $f_8(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$
9. $f_9(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+3}$

Exemple 8

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x - 1$
   - **a.** Étudier le sens de variations de f et étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   - **b.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f.
   - **c.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β et donner un encadrement au millième de α et de β.
   - **d.** En déduire le signe de $f(x)$.
   - **e.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
   - **a.** Étudier le sens de variations de f et calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   - **b.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f.
   - **c.** Calculer $f''(x)$. En déduire que la fonction f' admet un maximum en 0.
   - **d.** Écrire une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 et tracer (T).
   - **e.** Étudier algébriquement la position relative de $(\mathscr{T})$ et $(\mathscr{C})$.