

Chapitre 12 : Trigonométrie

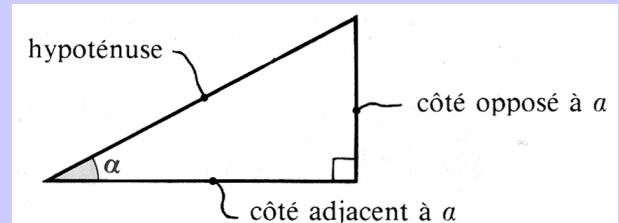
1 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Définition 1 : cosinus et sinus dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle :

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$



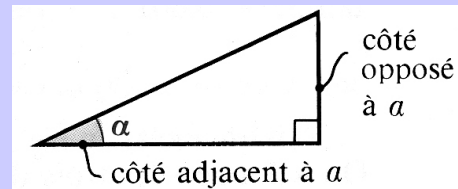
Propriété 1 : théorème de Pythagore trigonométrique

Pour tout angle α aigu d'un triangle rectangle, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Définition 2 : tangente dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle :

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



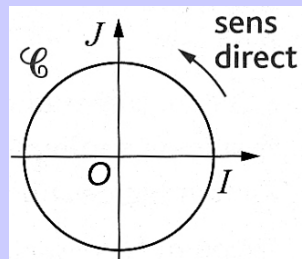
Propriété 2 : valeurs remarquables

Angle	30°	45°	60°
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 3 : orientation du cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle orienté comme ci-contre, de centre O et de rayon 1.

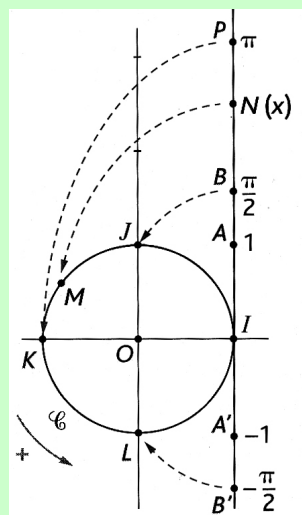


Propriété 3 : correspondance sur le cercle trigonométrique

Tout point N d'abscisse x de la droite des réels vient se superposer à un point M du cercle $\mathcal{C}$ et on associe ainsi à tout réel x un unique point M du cercle trigonométrique.

Propriété 4 : superposition sur le cercle trigonométrique

Après enroulement sur le cercle trigonométrique, deux points N et N' d'abscisse x et x' différant d'un multiple de 2π ont le même point associé sur le cercle.



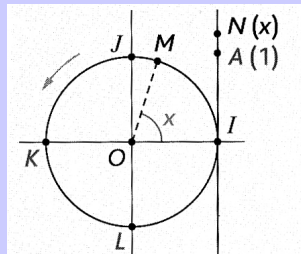
Exemple 1

1. Citer trois réels qui ont le même point associé sur le cercle trigonométrique que $\frac{\pi}{4}$.
2. Même question avec $\frac{2\pi}{3}$.
3. Même question avec π .
4. Déterminer le réel appartenant $[0; 2\pi]$ qui a le même point associé que $\frac{113\pi}{3}$.
5. Même question avec $-\frac{73\pi}{2}$.
6. Même question avec $\frac{59\pi}{4}$.

Définition 4 : angle associé à un réel

Soit x un réel et N un point de la droite des réels d'abscisse x qui a pour associé le point M sur le cercle trigonométrique.

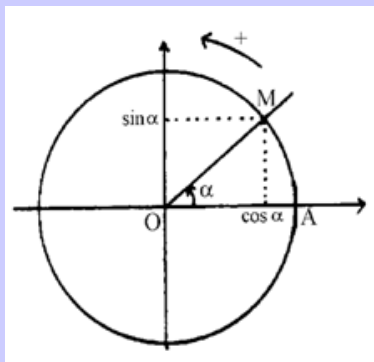
On dit que le réel x est la mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

**Définition 5 : cosinus et sinus d'un réel**

Soit α un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique tel que : $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \alpha$

$\cos \alpha$ est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{OA}, \vec{OB})$

$\sin \alpha$ est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{OA}, \vec{OB})$



Propriété 5 : sinus et cosinus d'un nombre réel

Pour tout nombre réel α :

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Exemple 2

1. Calculer $\cos \alpha$ sachant que $\sin \alpha = \frac{3}{10}$ et que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\cos \alpha$ sachant que $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Calculer $\sin \alpha$ sachant que $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ et que $\alpha \in [0, \pi]$.
4. Calculer $\sin \alpha$ sachant que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ et que $\alpha \in [-\pi, 0]$.

Propriété 6 : valeurs remarquables

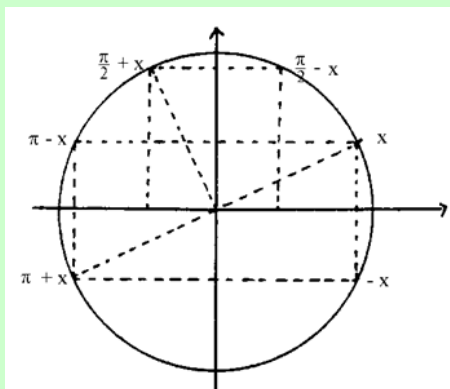
x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x (en deg)	0	30	45	60	90	180
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Propriété 7 : cosinus et sinus

Soit x un réel.

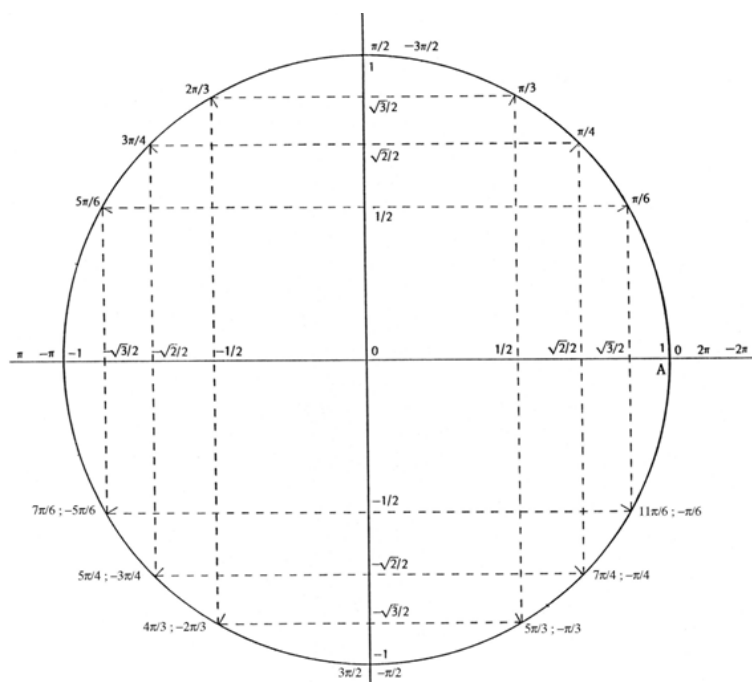
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array} \right.$$

Remarque

Il ne faut pas essayer de retenir par cœur ces formules. Il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver **rapidement** à l'aide du cercle trigonométrique.



Exemple 3

Dans chaque cas, exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x)$
2. $B = \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
3. $C = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
4. $D = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

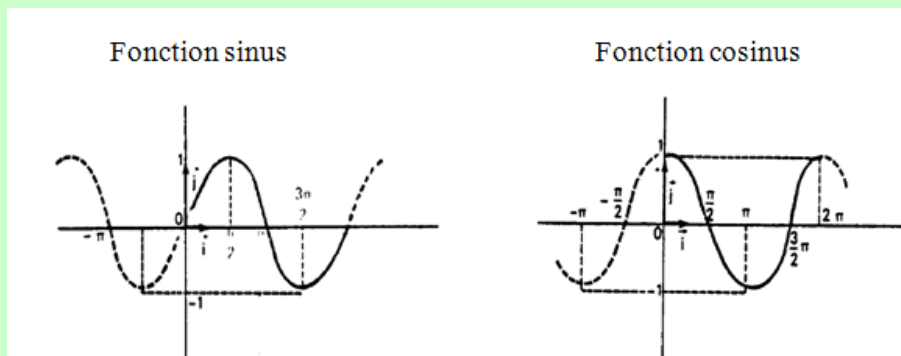
Exemple 4

Montrer que pour tout réel x :

1. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$.
2. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.
3. $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$.

Propriété 8 : parité, périodicité, dérivabilité

1. La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.
2. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .
3. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$
5. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors les fonctions $\cos u(x)$ et $\sin u(x)$ sont dérivables sur I et :
 $\forall x \in I, (\cos u(x))' = -u'(x) \sin u(x)$ et $(\sin u(x))' = u'(x) \cos u(x)$

**Exemple 5**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \cos(2x + \pi)$
2. $f_2(x) = \cos x \sin(2x)$
3. $f_3(x) = \cos^2 x + 4 \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$
4. $f_4(x) = \tan x$

4 Tangente d'un nombre réel

Définition 6 : fonction tangente

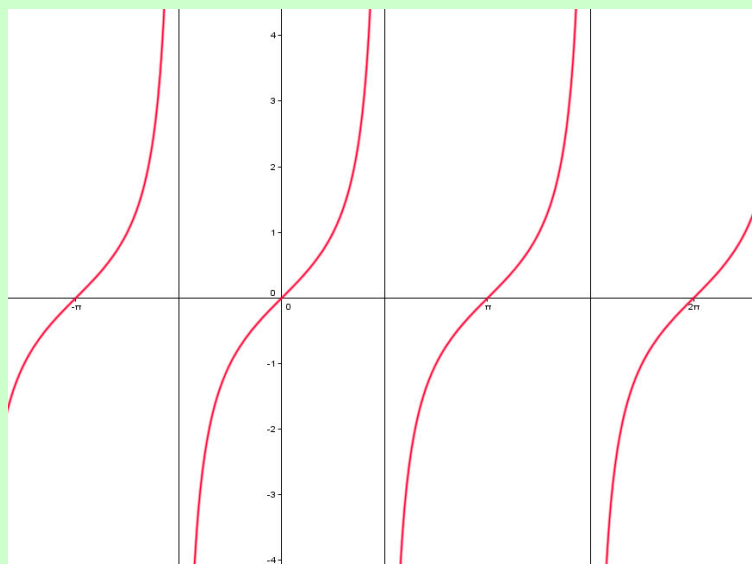
On définit $\tan x$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

L'ensemble de définition de la fonction tangente est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriété 9 : parité, périodicité, dérivabilité

1. La fonction tangente est définie et dérivable sur tout intervalle du type $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[(k \in \mathbb{Z})$.
2. La fonction tangente est impaire et π -périodique.
3. $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
4. La fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle du type $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[(k \in \mathbb{Z})$.
5. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un intervalle du type $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[(k \in \mathbb{Z})$ alors la fonction $\tan u(x)$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (\tan u(x))' = u'(x) (1 + \tan^2 u(x)) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}.$$

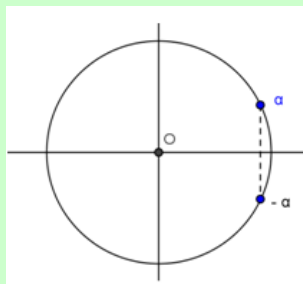


5 Équations trigonométriques

Propriété 10 : Équations du type $\cos x = \cos a$

L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solution l'ensemble des réels x vérifiant $x = a + k2\pi$ ou $x = -a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

autrement dit : deux nombres ont le même cosinus si et seulement s'ils sont égaux ou opposés à 2π près.



Exemple 6

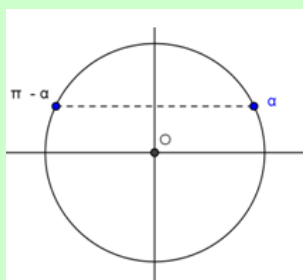
Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble I et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ dans $I = \mathbb{R}$.
2. Même équation mais dans $I = [-\pi; \pi]$.
3. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ dans $I = \mathbb{R}$
4. Même équation mais dans $I = [0; 2\pi]$.
5. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$ dans $I = \mathbb{R}$.
6. Même équation mais dans $I = [0; 2\pi]$.

Propriété 11 : Équations du type $\sin x = \sin a$

L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solution l'ensemble des réels x vérifiant $x = a + k2\pi$ ou $x = \pi - a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

autrement dit : deux nombres ont le même sinus si et seulement si ils sont égaux ou supplémentaires à 2π près.



Exemple 7

Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble I et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 0$ dans $I = \mathbb{R}$.
2. Même équation mais dans $I = [-\pi; \pi]$.
3. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ dans $I = \mathbb{R}$
4. Même équation mais dans $I = [0; 2\pi]$.
5. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ dans $I = \mathbb{R}$.
6. Même équation mais dans $I = [0; 2\pi]$.

Remarque

On sait aussi résoudre les équations du type $\cos x = \sin \alpha$, il suffit de remplacer $\sin \alpha$ en un cosinus ($\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ par exemple).

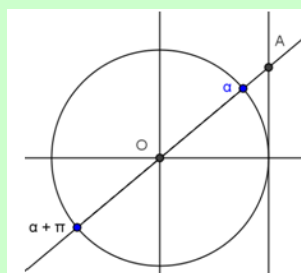
Exemple 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos x = 0$
2. Résoudre l'équation précédente dans $[-\pi; \pi]$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$
4. Résoudre l'équation précédente dans $[0; 2\pi]$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Propriété 12 : Équations du type $\tan x = \tan a$

L'équation $\tan x = \tan a$ a pour solution l'ensemble des réels x vérifiant $x = a + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

autrement dit : deux nombres ont la même tangente si et seulement si ils sont égaux à π près.

**Remarque**

Pour les équations où figure la fonction tangente, il est indispensable de déterminer d'abord l'ensemble de définition.

Exemple 9

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\tan(2x) - \tan x = 0$
2. Résoudre l'équation précédente dans $[-\pi; \pi]$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$
4. Résoudre l'équation précédente dans $[0; 2\pi]$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

6 Inéquations trigonométriques**Démarche**

On se ramène à une inéquation du type $\cos \leq a$ ou $\cos \geq a$ ou $\cos < a$ ou $\cos > a$ (idem avec les fonctions sinus et tangente), on détermine les solutions sur une période à l'aide du cercle trigonométrique.

Exemple 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2 \cos x + 1 \geq 0$
3. Résoudre dans $[0; 2\pi]$: $\cos x(2 \sin x + 1) \geq 0$
4. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$: $\sin x(2 \cos x - 1) < 0$

Exemple 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - 8 \cos x - 4 \cos(2x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
En déduire un intervalle I restreint d'étude de la fonction f .
2. En admettant que $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, montrer que $f'(x) = 8 \sin x(1 + 2 \cos x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur I .
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de la fonction f aux points d'abscisse respective $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$.
5. Tracer les tangentes horizontales, les deux tangentes aux points d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et la courbe ($\mathcal{C}$) sur $[-3\pi; 3\pi]$.
6. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $[-3\pi; 3\pi]$ où m est un paramètre qui décrit $\mathbb{R}$.