Chapitre 5 : Second degré

Définition 1 : fonction polynôme du second degré

Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$

Propriété 1 : forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$).
Alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$
Cette forme est appelée forme canonique de la fonction polynôme du second degré

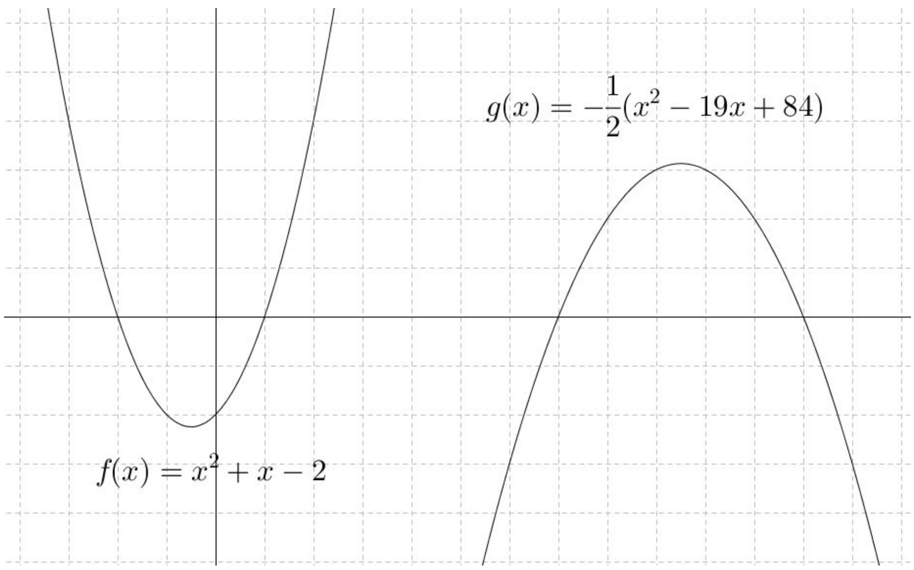
Remarque
Cette expression n'est pas à connaître "par cœur" mais à retrouver dans chaque cas.

Exemple 1
Mettre sous forme canonique les fonctions polynômes du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 + 4x + 7$
2. $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$
3. $f_3(x) = 2x^2 + 6x + 10$
4. $f_4(x) = 2x^2 - 3x + 1$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{6}x + 1$
6. $f_6(x) = 3x^2 - 24x + 48$
7. $f_7(x) = -x^2 - 4x + 1$
8. $f_8(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Définition 2 : parabole

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée parabole.



Propriété 2 : variations

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré $(a \neq 0)$.

- **Si** $a > 0$ alors la fonction f est décroissante puis croissante.
  On dit que la parabole est **ouverte (ou tournée) vers le haut**.

- **Si** $a < 0$ alors la fonction f est croissante puis décroissante.
  On dit la parabole est **ouverte (ou tournée) vers le bas**.

Définition 3 : discriminant

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré $(a \neq 0)$.
On appelle discriminant et on note Δ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 3 : racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré $(a \neq 0)$.

- Si $\Delta > 0$ alors la fonction polynôme admet deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors la fonction polynôme admet une unique racine $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors la fonction polynôme n'admet aucune racine réelle.

Remarque : les expressions des solutions dans le cas ou $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ sont cohérentes.
En effet si $\Delta = 0$ alors $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple 2
Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : 4x^2 - 9x + 2 = 0$
2. $(E_2) : 3x^2 + 2x - 1 = 0$
3. $(E_3) : -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{2} = 0$
4. $(E_4) : 2x^2 + x + 1 = 0$
5. $(E_5) : 7x^2 - 5x + 2 = 0$
6. $(E_6) : 36x^2 - 48x + 16 = 0$
7. $(E_7) : x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$
8. $(E_8) : x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$
9. $(E_9) : x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
10. $(E_{10}) : x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Exemple 3
Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : \dfrac{2x+5}{x-2} - \dfrac{3x-6}{x+4} = 2$
2. $(E_2) : \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$
3. $(E_3) : \dfrac{18x^2+11x-25}{16x^2+62x+55} = -2$
4. $(E_4) : \dfrac{5x+3}{2x-1} = \dfrac{x-2}{-2x+3}$

Exemple 4
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $(S_1) : \begin{cases} x+y = \dfrac{43}{3} \\ xy = 24 \end{cases}$
2. $(S_2) : \begin{cases} x+y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$
3. $(S_3) : \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x-5y = 13 \end{cases}$
4. $(S_4) : \begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$

Exemple 5

1. Trouver deux entiers consécutifs dont le produit est égal à 4 970.
2. Un rectangle de 308 m^2 dont la longueur mesure 8 mètres de plus que la largeur. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?
3. L'aire d'un triangle rectangle est de 429 m^2, et l'hypoténuse a pour longueur $h = 72,5$ m. Déterminer le périmètre puis les dimensions du triangle

Propriété 4 : factorisation

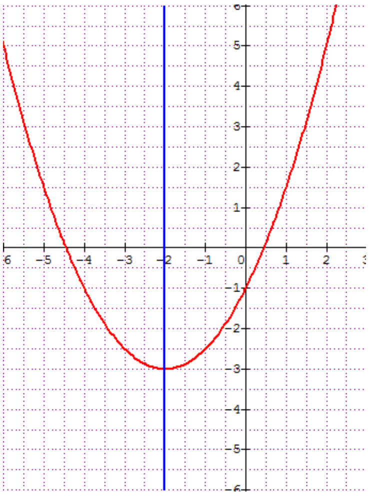
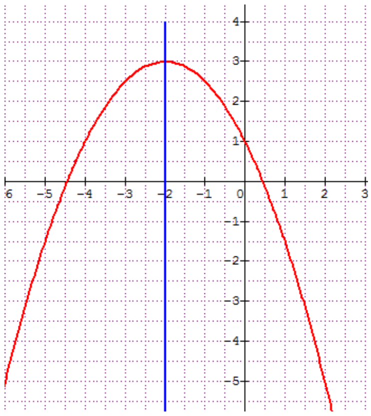
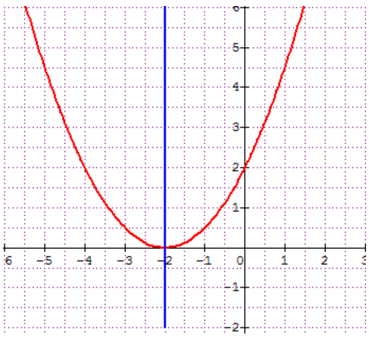
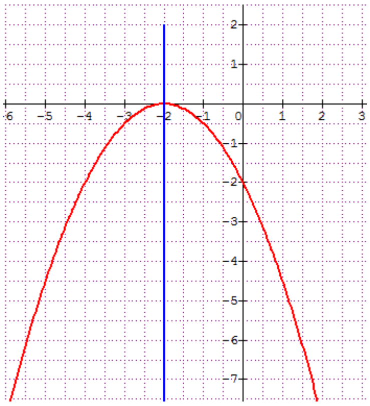
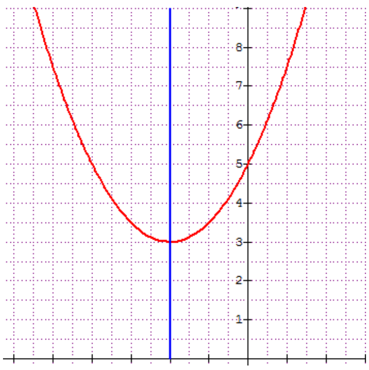
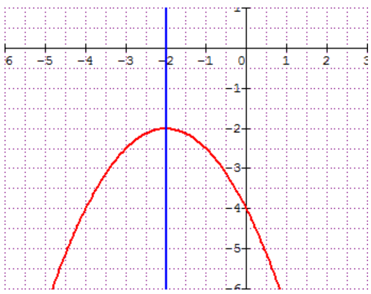
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré $(a \neq 0)$. Alors :

- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x-x_1)^2$ où x_1 est la racine de f.
- Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser f sur $\mathbb{R}$

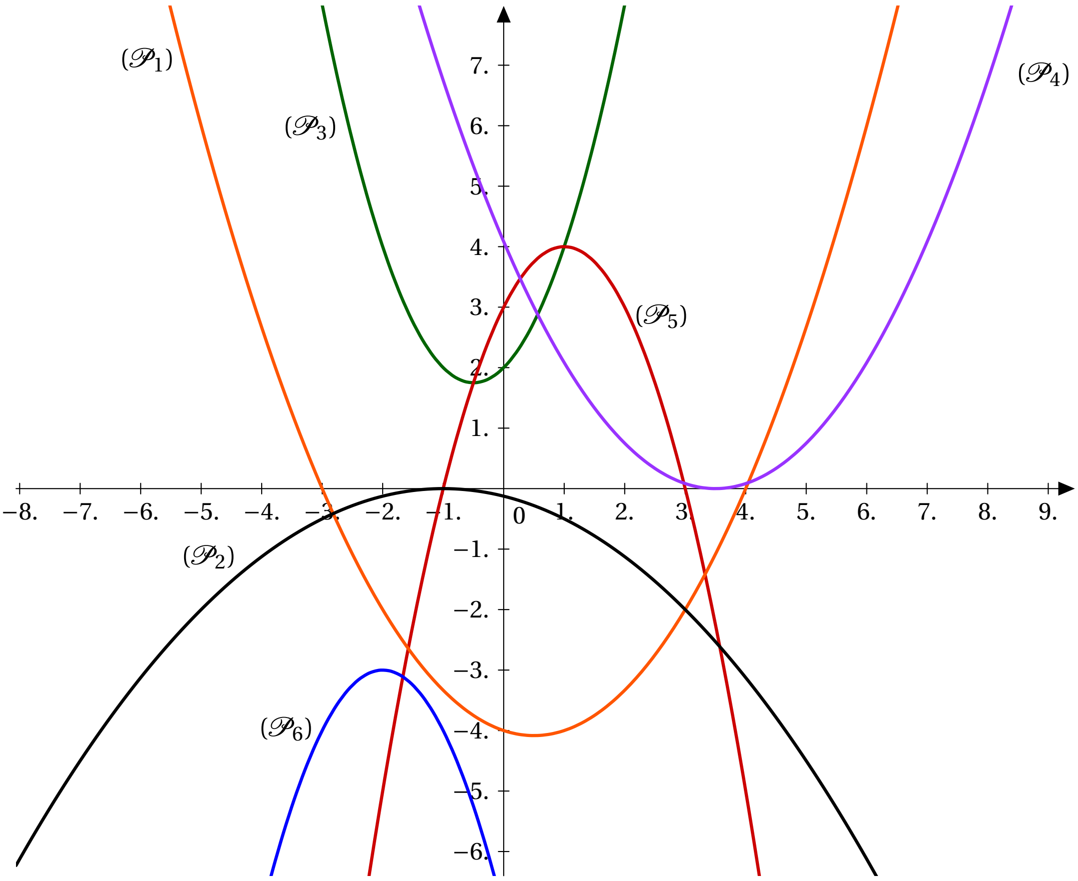
Exemple 6
Factoriser au maximum les polynômes suivants :

1. $P_1(x) = x^2 + x - 6$
2. $P_2(x) = x^2 + 3x - 40$
3. $P_3(x) = -2x^2 + 5x + 3$
4. $P_4(x) = 3x^2 + 13x - 10$
5. $P_5(x) = -2x^2 + x - 3$
6. $P_6(x) = x^2 + x + 2$
7. $P_7(x) = 5x^2 - \dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{9}$
8. $P_8(x) = 9x^2 - 12x + 4$
9. $P_9(x) = x^2 - 5x + 3$
10. $P_{10}(x) = x^2 + 8x - 5$
11. $P_{11}(x) = x^3 - x^2 - 74x + 144$
12. $P_{12}(x) = x^3 - 111x + 110$

Remarque : Étude du signe
Pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré, on recherche la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses (voir courbes ci-dessous) en examinant successivement le signe de a et le signe de Δ.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Exemple 7
On note $y = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole.
Pour chaque parabole $(\mathscr{P}_1), (\mathscr{P}_2), (\mathscr{P}_3), (\mathscr{P}_4), (\mathscr{P}_5)$ et $(\mathscr{P}_6)$, déterminer le signe des coefficients a et c et du discriminant Δ.



Exemple 8
Déterminer le signe des fonctions polynômes suivantes :

1. $P_1(x) = 4x^2 - 9x + 2$
2. $P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$
3. $P_3(x) = -3x^2 + 2x + 4$
4. $P_4(x) = -x^2 - x + 5$
5. $P_5(x) = -3x^2 + x - 2$
6. $P_6(x) = 12x^3 + 5x^2 - 17x - 10$
7. $P_7(x) = 6x^3 - 11x^2 + x + 4$
8. $P_8(x) = x^4 - x^2 - 12$

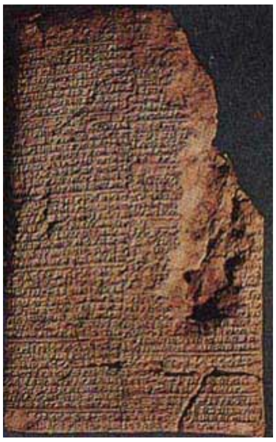
Exemple 9
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(I_1) : -x^3 + 4x^2 - 4x + 3 > 0$
2. $(I_2) : 3x^3 - x^2 - x - 1 \leqslant 0$
3. $(I_3) : \dfrac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} > 0$
4. $(I_4) : \dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} < 0$
5. $(I_5) : \dfrac{4}{1 - x} + \dfrac{3}{x - 2} \geqslant 1$
6. $(I_6) : \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{3}{x - 2} < 4$

Un peu d'histoire

Depuis l'Antiquité les mathématiciens ont cherché à résoudre des équations du second degré.
Le premier témoignage connu de résolution d'une équation du second degré se trouve sur une tablette babylonienne, datant environ de 2000 avant J.-C. :
Voici le problème posé : *Connaître la longueur du côté d'un carré dont l'aire moins le côté est égale à 870.*
Voici la réponse :
On prend la moitié de 1, qui est 0 ;30 et on multiplie 0 ;30 par 0 ;30 ce qui donne 0 ;15 ce résultat est ajouté à 14 ;30 . On obtient 14 ;30 ;15. Mais 14 ;30 ;15 est le carré de 29 ;30. En fin on ajoute 0 ;30 à 29 ;30 et le résultat est 30, côté du carré.
Il ne faut pas oublier que les Babyloniens calculaient en base soixante, donc le texte traduit en base dix donne :
On prend la moitié de 1, qui est 1/2 et on multiplie 1/2 par 1/2 ce qui donne 1/4 ce résultat est ajouté à 870 . On obtient 870,25. Mais 870,25 est le carré de 29,5. Enfin on ajoute 1/2 à 29,5 et le résultat est 30, côté du carré.
L'équation notée avec des notations modernes est : $x^2 - x = 870$.
La solution donnée par les Babyloniens est alors : $\dfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 870} = 30$.
On peut effectuer quelques remarques :

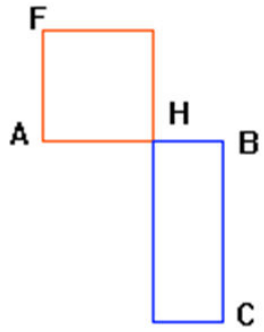
- Les Babyloniens n'utilisaient aucun symbole, la résolution est donnée sous forme rhétorique,
- Seule la solution positive est donnée, les nombres négatifs sont inconnus des Babyloniens,
- Aucune justification n'est présente dans l'algorithme énoncé. Aucune généralisation n'est proposée.
- La réponse donnée par les Babyloniens est très proche de celle que l'on donne actuellement (pour la solution positive).



Tablette contenant plusieurs problèmes du second degré (British Museum)

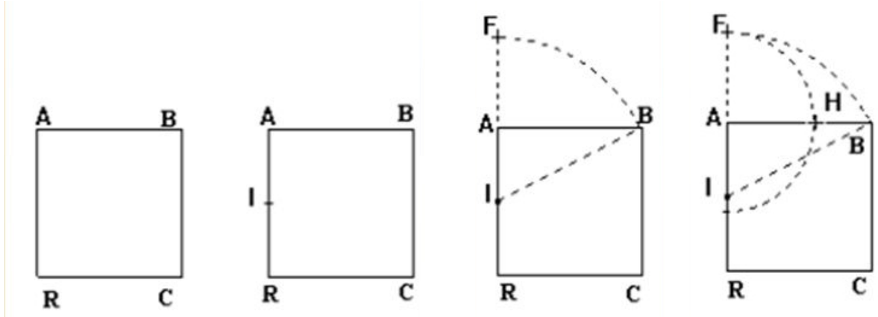
Avec les Grecs les résolutions des équations du second degré vont changer de registre. Les Grecs résolvent les équations du second degré par la géométrie.
Dans le livre II des Éléments, proposition 14, **Euclide** (grec, -325, -265) énonce :

Un segment AB étant donné, construire un point H de ce segment tel que le carré de côté AH ait la même aire que le rectangle de côtés BH et AB.



Euclide résout cette équation par la géométrie. Voici sa solution :
- il construit le carré $ABCR$
- le milieu I de $[AR]$,
- le point F de la demi-droite $[RA)$ tel que $IF = IB$,
- le point H de $[AB]$ tel que $AH = AF$

puis affirme que le point H est le point cherché.



En notations modernes, l'équation est : $x^2 = a(a-x)$ si x désigne AH et a désigne AB.
On peut aisément vérifier que $AH = \dfrac{-a+a\sqrt{5}}{2}$ qui est la solution positive de l'équation.

Diophante (grec, entre 150 et 350 après JC) a dans son ouvrage $Arithm\acute{e}tique$ traité de diverses équations à une ou plusieurs inconnues. Il fut aussi le premier à donner des abréviations pour les inconnues mais ne les utilisait pas en termes de symboles mathématiques.
Voici un de ses problèmes "*Trouver deux nombres tels que leur somme soit 20 et leur produit 96*".
Si actuellement, on classerait ce problème dans les problèmes du second degré, Diophante le résolvait d'une manière qui ne nécessitait de connaître que les racines carrées.
En effet, en notations modernes, Diophante écrit : les deux nombres cherchés s'écrivent $10+\alpha$ et $10-\alpha$. Leur produit est alors égal à $100-\alpha^2$ qui est égal à 96. Ainsi $\alpha^2 = 4$ et $\alpha = 2$.
Les deux nombres cherchés sont donc 8 et 12.

Le mathématicien arabe **al-Khwarizmi** (arabe, 780-850) est le premier mathématicien à énoncer des règles de calcul algébrique servant à résoudre les équations.

Par exemple, soit l'équation (avec les notations actuelles) : $2x^2+100-20x = 58$

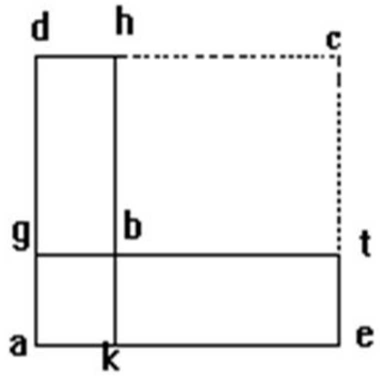
Par *al-jabr* l'équation devient : $2x^2+100-58 = 20x$ (on ajoute $20x$ et on soustrait 58 à chaque membre)

Par *al-muqabala* l'équation devient : $2x^2+42 = 20x$ (on réduit les termes de même espèce)

Par *al-hatt* l'équation devient : $x^2+21 = 10x$.

Ainsi al-Khwarizmi répertorie 5 types d'équations du second degré :
(1) : $ax^2 = bx$ (2) : $ax^2 = c$ (3) : $ax^2 + bx = c$
(4) : $ax^2 + c = bx$ (5) : $bx + c = ax^2$.
Voici un problème posé par al-Khwarizmi :
"*Que le carré et dix racines égalent 39 unités*", ce qui se traduit en langage moderne par :
$x^2 + 10x = 39$.
Al-Khwarizmi énoncé la règle suivante : " *La règle est que tu divises les racines en deux moitiés, ici tu obtiens 5, que tu multiplieras par lui-même, on a 25, que tu ajoutes à 39 et on obtient 64. Tu prends la racine qui est 8, tu en retranches la moitié du nombre des racines qui est 5, il en vient 3 qui est la racine que tu cherches, le carré est 9.*
La justification de cette règle est de nature géométrique.

On construit :
- $agbk$ un carré dont le côté est l'inconnue,
- $gdhb$ et $bket$ des rectangles tels que
$gd = ke = 5$ (moitié de 10),
- puis on complète avec le carré $btch$ dont
l'aire est égale à 25.

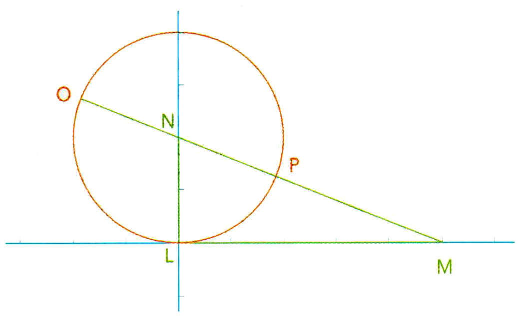


Ainsi le carré $aecd$ a une aire égale à $x^2 + 10x + 25$ c'est-à-dire à $39 + 25 = 64$. D'où le côté ae est égal à 8 et ainsi le côté ak cherché à 3.

Avec al-Khwarizmi, un grand pas est franchi : la résolution est de nature algébrique (c'est-à-dire des transformations d'écritures) mais elle est justifiée par des considérations géométriques.

Cette tradition de résoudre les équations par une justification géométrique perdure dans le temps puisque **Descartes** (français, 1596-1650) justifie la résolution de l'équation $x^2 = ax + b^2$ de la manière suivante :
"Si j'ai par exemple $xx = ax + bb$, je fais le triangle rectangle NLM dont le côté LM est égal à b, racine quarrée de la quantité connue bb, et l'autre est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue qui était multipliée par x que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant MN, la base de ce triangle jusqu'à O, en sorte que NO soit égal à NL, le tout OM est la ligne cherchée et elle s'exprime en cette sorte :

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$



Il faut attendre encore plus d'un siècle pour que les mathématiciens se détachent de la géométrie pour justifier la résolution des équations du second degré. Dans les leçons à

l'École Normale Supérieure en 1795 (an III), **Pierre-Simon Laplace** (français, 1749-1827) justifie la résolution des équations du second degré sans référence à la géométrie mais on peut encore remarquer qu'il ne traite pas le cas général mais propose l'algorithme sur un exemple.
Supposons que l'on se propose de trouver un nombre tel que si de trois fois ce nombre, on retranche son carré, le reste soit égal à 2. En nommant x ce nombre, $3x$ en sera le triple, et son carré sera x^2 ; leur différence sera donc $3x - x^2$; ainsi l'on aura l'équation $3x - x^2 = 2$.
C'est la traduction algébrique de la question proposée ; il s'agit d'en tirer la valeur de l'inconnue.
Pour cela, on commence par rendre le carré de l'inconnue positif, ce que l'on fait en multipliant tous les termes de l'équation par -1, et alors on a $x^2 - 3x = -2$.
Si par l'addition d'un terme connu à chaque membre de l'équation, on parvenait à rendre le premier membre un carré parfait, il est clair qu'en extrayant la racine carrée de chaque membre, l'équation s'abaisserait au premier degré ; on sait que le carré d'un binôme est égal au carré du premier terme, plus au double du produit du premier terme par le second, plus au carré du second ; en considérant donc x comme le premier terme du binôme, et $-3x$ comme étant égal au produit de x par le double du second, $-\dfrac{3}{2}$ sera ce second terme ; il suffit donc d'ajouter son carré ou $\dfrac{9}{4}$ au premier membre de l'équation précédente, pour le rendre un carré parfait. Cette équation devient ainsi :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 2.$$

En extrayant la racine carrée de chaque membre, on a :

$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - 2}.$$

Mais on doit faire ici une observation importante. La racine carrée d'un nombre peut être également affectée du signe $+$, ou du signe $-$; car le carré de $-a$ est le même que celui de $+a$. Ainsi, en extrayant la racine carrée de chaque membre de l'équation précédente, le signe radical peut être indifféremment affecté de l'un ou l'autre de ces signes, et rien n'indique lequel doit être employé. Pour exprimer cette double signification du radical, on le fait précéder du double signe $\pm$. On a ainsi :

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 2}.$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

On a donc pour x les deux valeurs $x = 2$, et $x = 1$, suivant que l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$, et il est visible que chacune de ces valeurs satisfait également à la question proposée. Ces valeurs ont été nommées racines de l'équation.
Vous voyez par là que les équations du second degré ont un caractère très distinct de celles du premier degré, dans lesquelles l'inconnue n'est susceptible que d'une seule valeur, et vous pouvez déjà en conclure que, dans les équations du troisième degré et des degrés supérieurs où l'inconnue est élevée à la troisième puissance et à des puissances plus élevées, l'inconnue a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa plus haute puissance.