Chapitre 6 : Équations de courbes, droites et cercles

1 Quelques définitions

Définition 1 : coordonnées

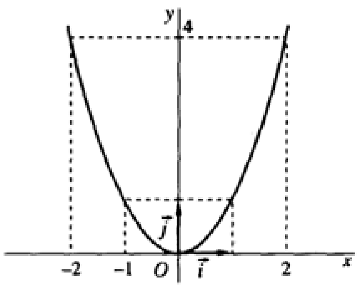
Tout point du plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ peut être repéré par un couple de coordonnées $(x;y)$ avec x et y appartenant à $\mathbb{R}$.
Réciproquement, chaque couple de réels $(x;y)$ est représenté dans le plan par un point.
On note l'ensemble des couples $(x;y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou plus naturellement $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, on peut dire que le plan est "assimilable" à $\mathbb{R}^2$.

Définition 2 : équation de courbe

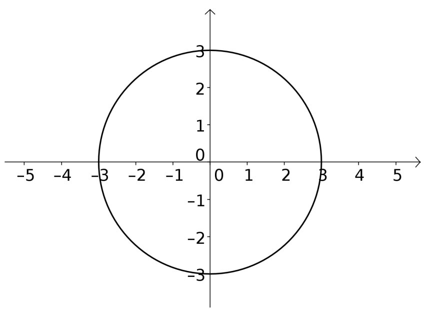
Les solutions d'une équation à deux inconnues peuvent ainsi être représentées par un ensemble de points appelé "courbe" d'une manière générale.
Ainsi un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation.

Exemple 1

1. Les points $A(1;-1)$, $B(10;5)$, $C(20;20)$ sont-ils sur les courbes suivantes, dont on donne les équations ?
   a. $(\mathscr{C}_1) : 2x - 3y = 5$.
   b. $(\mathscr{C}_2) : y = \dfrac{x^2}{20}$.
   c. $(\mathscr{C}_3) : x^2 + y^2 - 5x + 2y + 5 = 0$.
2. Définir par une équation la courbe suivante :



3. Même question avec la courbe suivante :



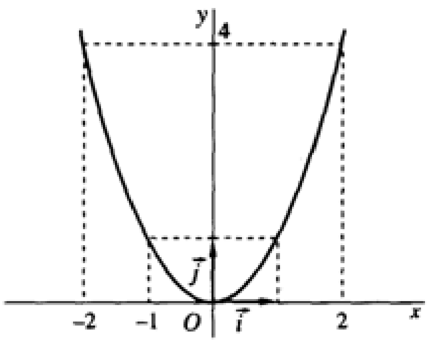
2 Relation fonctionnelle

Définition 3 : courbe et équation

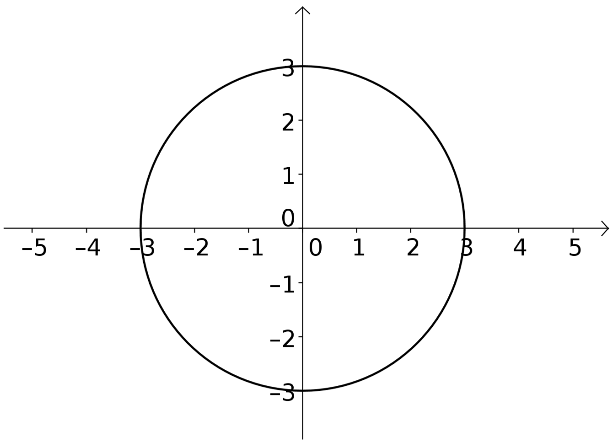
Si la relation est définie par :
- une formule de la forme $y = \ldots$ (c'est-à-dire une formule qui permet de calculer directement y à partir de x),
- ou par une courbe telle qu'il n'y ait pas deux points de même abscisse

alors on dit que y est fonction de x.
La courbe correspondante est alors la représentation graphique de la fonction ainsi définie.

Illustration
La courbe d'équation $y = x^2$ est la représentation graphique d'une fonction (ou d'une relation fonctionnelle)

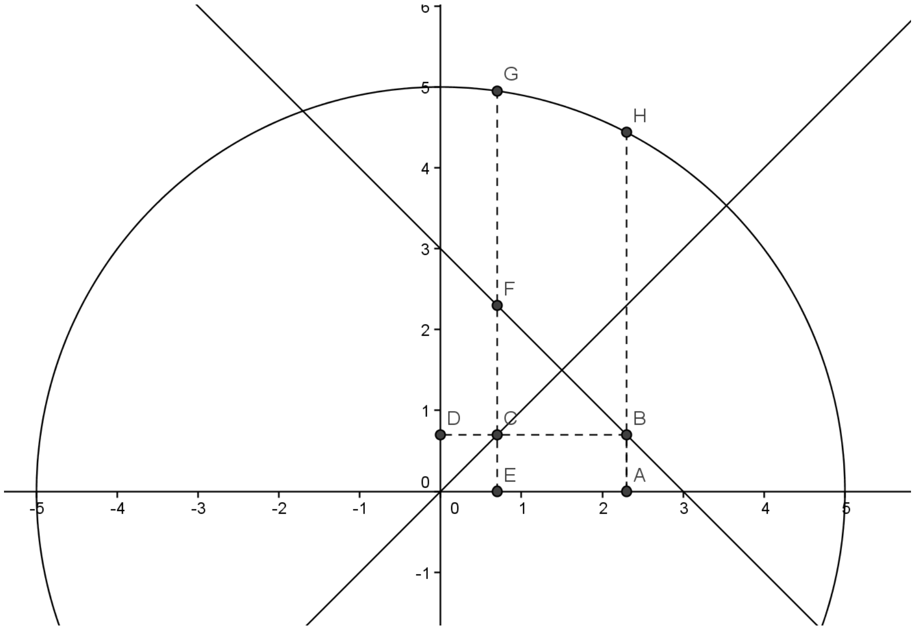


La courbe d'équation $x^2 + y^2 = 9$ n'est pas la représentation graphique d'une relation fonctionnelle

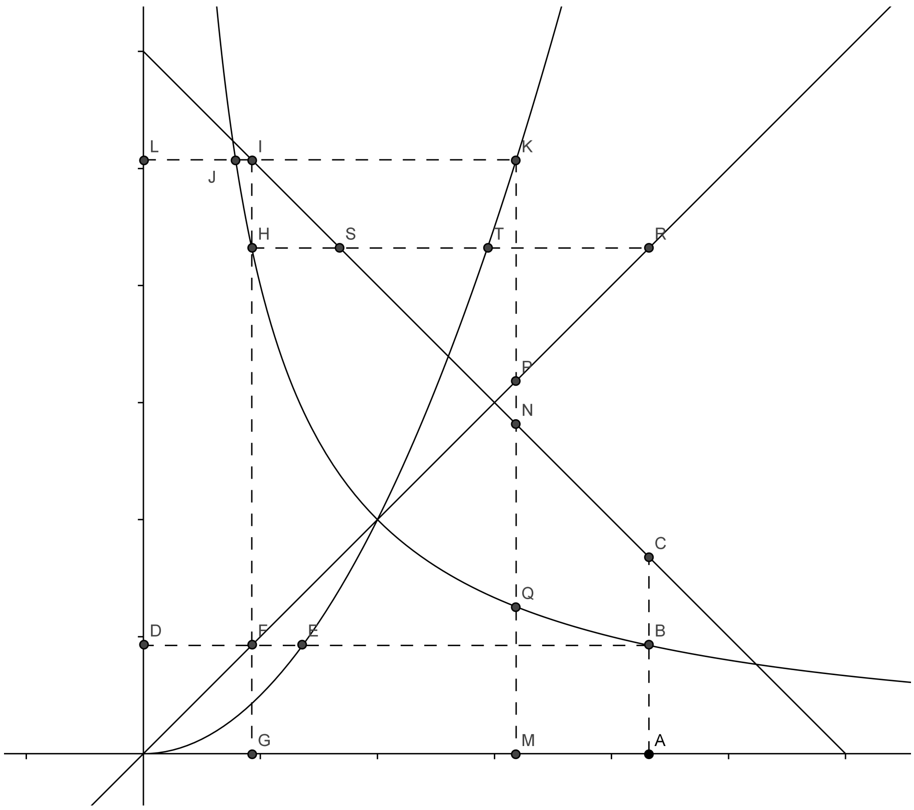


Exemple 2

1. On considère les trois courbes, tracées dans le repère ci-dessous, d'équations respectives $x^2 + y^2 = 25, x + y = 3$ et $x - y = 0$.
   On note a l'abscisse du point A avec $a > 0$.
   Déterminer en fonction de a les coordonnées des points B, C, D, E, F, G et H.



2. Même question avec les courbes d'équations $y = 3 - x$, $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ pour les points de A à T.



Propriété 1 : fonction affine

La représentation graphique d'une relation fonctionnelle du premier degré (c'est-à-dire d'une fonction affine) est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
La relation $y = mx + p$ est alors appelée équation de la droite.
Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$.

3 Équation de droite

Propriété 2 : équation de droite

Toute droite du plan a une équation de la forme :
- $y = mx + p$ si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées
- $x = p$ si elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

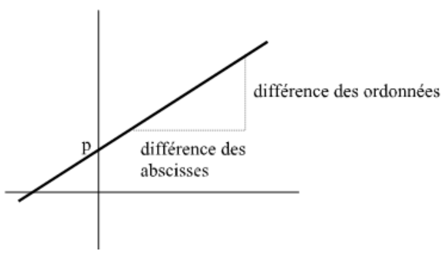
Ce type d'équation est appelée équation réduite de la droite.

Remarque
Le nombre p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. Il est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

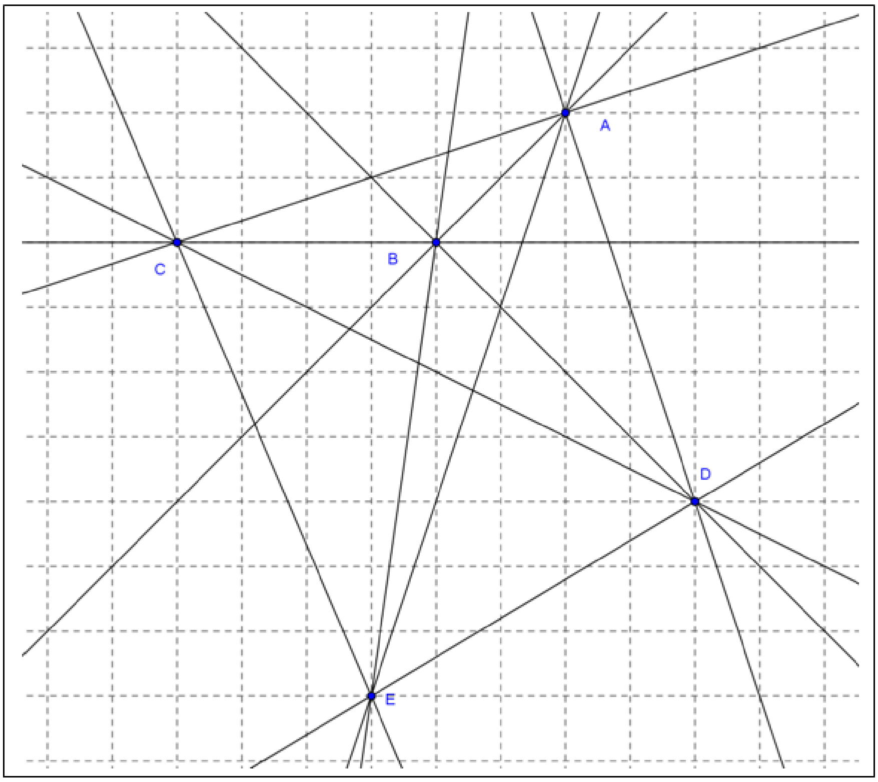
Propriété 3 : coefficient directeur

Si A et B sont deux points distincts d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, alors le coefficient directeur m de la droite est égal à

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Exemple 3
Déterminer le coefficient directeur des 10 droites tracées.



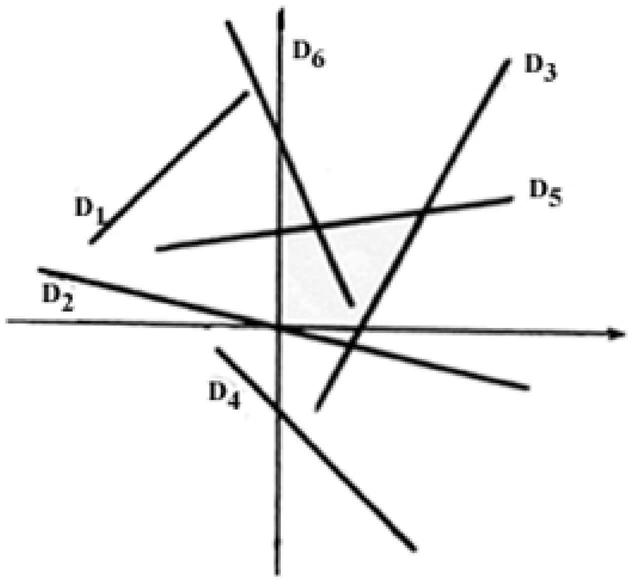
Propriété 4 : pente et sens de variation

Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $y = mx + p$.
Si $m > 0$, la droite « monte » (en regardant de la gauche vers la droite), la fonction affine f associée est croissante.
Si $m < 0$, la droite « descend », la fonction affine associée est décroissante.

Remarques
Une droite qui "monte à 45°" a un coefficient directeur égal à 1.
Une droite qui "descend à 45°" a un coefficient directeur égal à -1.
Plus le coefficient directeur est grand, plus la droite "monte".

Exemple 4
Sans faire aucune mesure, compléter le tableau ci-dessous. (le repère est orthonormé).

Coefficient directeur	Droite
$a < -1$	
$a = -1$	
$-1 < a < 0$	
$0 < a < 1$	
$a = 1$	
$a > 1$	



Remarque
Pour déterminer une équation de droite définie par deux points, on cherche d'abord le coefficient directeur, s'il existe, et ensuite on détermine l'ordonnée à l'origine en affirmant que la droite passe par un des points.

Exemple 5
Déterminer une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

1. $A(1,3), B(-2,5)$
2. $A(2,4), B(-3,6)$
3. $A(-3,-2), B(1,-2)$
4. $A(2,-1), B(1,4)$
5. $A(1,-2), B(1,5)$
6. $A(-5,4), B(-5,5)$
7. $A(5,4), B(1,0)$

Propriété 5 : droites parallèles

Soient deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Elles sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Propriété 6 : droites perpendiculaires

Soient deux droites non parallèles aux axes.
Elles sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1.

Exemple 6
On considère dans un repère orthonormé les points $A(2,1), B(-1,-2)$ et $C(-2,2)$.
Déterminer les équations des droites suivantes :

1. la parallèle à (AB) passant par C
2. la parallèle à (AC) passant par B
3. la perpendiculaire à (AB) passant par C.
4. la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Exemple 7

1. On considère dans un repère orthonormé les points $A(2,7), B(6,-1)$ et $C(-1,1)$.
   a. Déterminer une équation des hauteurs de ABC issues de A et de B.
   b. En déduire les coordonnées de l'orthocentre.
   c. Déterminer une équation des médiatrices des segments $[BC]$ et $[AC]$.
   d. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit.
2. Même question avec $A(4,2), B(8,4)$ et $C\left(7,\frac{1}{2}\right)$

4 Équation de cercle

Propriété 7 : équation de cercle

Tout cercle a une équation de la forme $x^2+ax+y^2+by+c=0$ mais réciproquement toute équation de la forme $x^2+ax+y^2+by+c=0$ n'est pas l'équation d'un cercle.

Remarque
Pour déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon r, le point de départ de la démarche est d'écrire que le point M appartient au cercle si et seulement si $AM=r$.

Exemple 8

1. Déterminer une équation du cercle de centre $A(1,3)$ et de rayon $r=5$.
2. Même question avec $A(-3,-1)$ et $r=\sqrt{3}$.
3. Déterminer une équation du cercle de centre $A(3,-1)$ passant par $B(2;3)$.
4. Même question avec $A(-4,2)$ et $B(-3,4)$.

Exemple 9
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble dont une équation est :

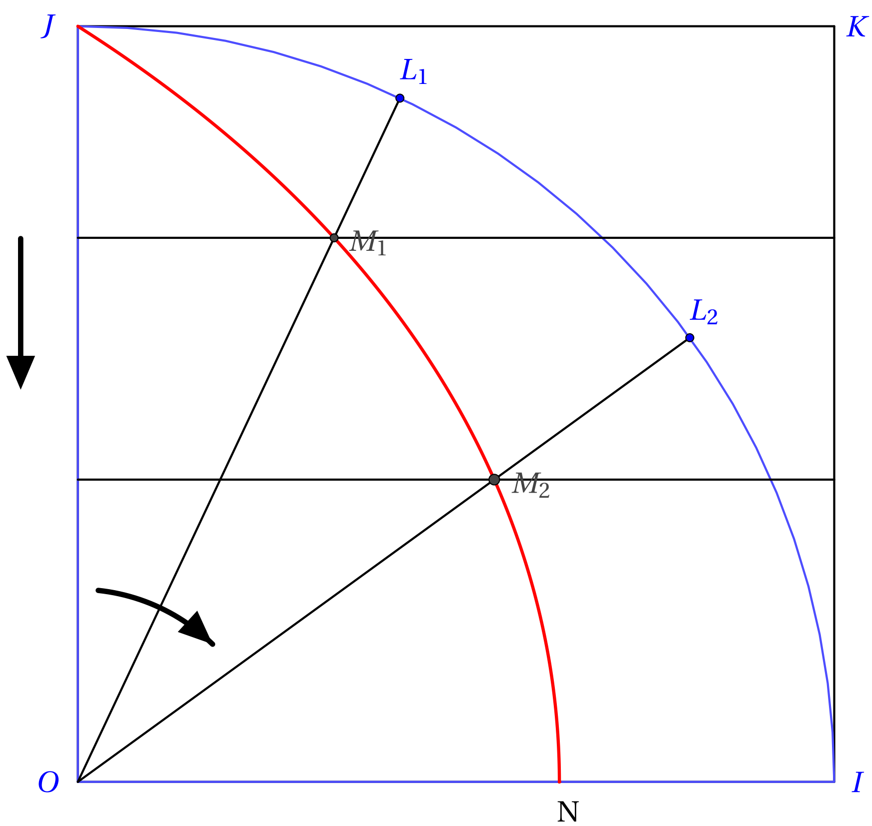
1. $x^2+y^2+4x-8y+5=0$
2. $x^2+y^2-5x+6y+1=0$
3. $x^2-4x+y^2-6y+17=0$
4. $x^2+2x+y^2-4y-1=0$
5. $x^2+8x+y^2+2y+17=0$

Exemple 10

1. On considère le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 - 14x + y^2 + 10y + 61 = 0$, les droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ d'équations respectives $y = \frac{1}{5}x - \frac{19}{5}$, $y = -x + 8$ et $y = -\frac{3}{2}x - 1$.
   Déterminer l'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ avec chacune des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$.
2. Même question avec le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 - 10x + y^2 + 2y + 6 = 0$ et les droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ d'équations respectives $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$ et $y = -3x + 30$.

Un peu d'histoire

Les notions de courbe et d'équation sont, depuis le début des mathématiques, très liées. Dès l'Antiquité, les mathématiciens construisent des courbes pour résoudre des problèmes. Par exemple, pour résoudre le problème de la quadrature du cercle ("construire un carré de même aire qu'un disque donné à la règle et au compas"), **Dinostrate** (mathématicien grec, environ 350 ans avant JC), construisit une courbe appelée "quadratrice de Dinostrate" : il eut l'idée de tracer, point par point, une courbe permettant une approche mécanique de cette construction :

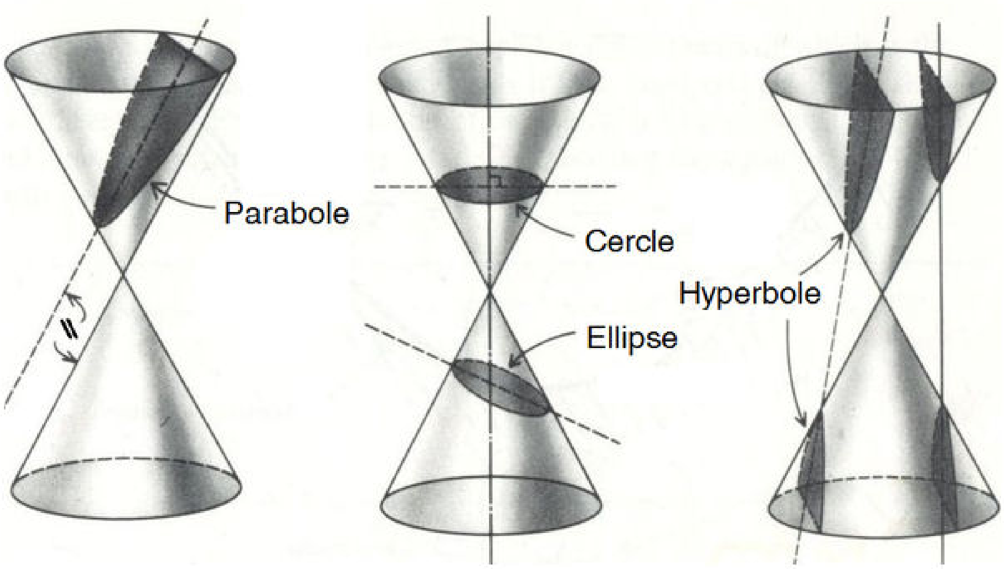


Prenons un carré $OIKL$ et traçons le quart de cercle passant par I et de centre O.
On suppose que le côté $[JK]$ se translate uniformément jusqu'en $[OI]$ pendant que le segment $[OL]$ tourne uniformément autour de O de sa position initiale jusqu'en $[OI]$ de sorte que les arrivées soient simultanées en un temps t que l'on prend comme unité.
On démontre, après quelques calculs, que :

$$ON = \frac{2}{\pi}.$$

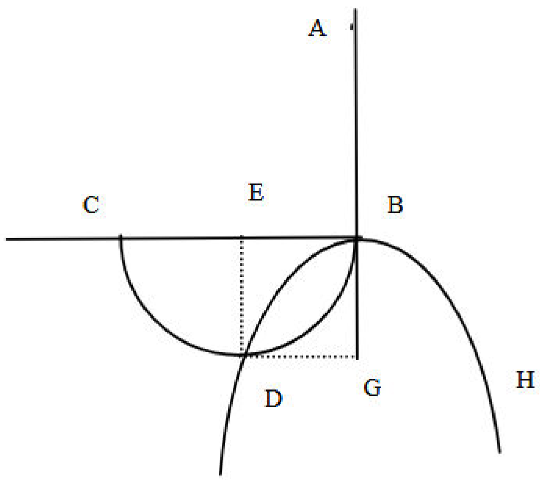
Donc si est capable de construire le point N, on est capable de construire le nombre π.
Malheureusement pour Dinostrate, il est impossible de construire à la règle et au compas tous les points de cette quadratrice. Le problème de la quadrature reste alors non résolu.

Depuis **Apolonius** (mathématicien grec, -262,-190), les courbes les plus étudiées sont les coniques, c'est-à-dire les intersections d'un plan avec un cône. On obtient ainsi des paraboles, des ellipses et des hyperboles.



Section d'un cône par un plan

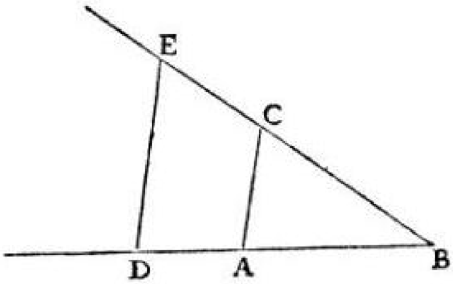
Les mathématiciens utilisaient les coniques pour résoudre notamment des équations du troisième degré. Le mathématicien arabe **Al-Kayyam** (1048-1131) classa les équations du troisième degré en 25 catégories (les catégories se distinguaient les unes des autres par le signe des coefficients). Il résout chacun de ces types par l'intersection de deux coniques prises par mi les suivantes : cercle, parabole et hyperbole (équilatère).
Prenons, par exemple l'équation de la catégorie 13 : $x^3 + bx = c$.
Soient les longueurs $AB = \sqrt{b}, BC = h$ telles que $[BC]$ soit perpendiculaire à $[AB]$ et telles que $b \times h = c$. On considère la parabole (P) de sommet B, d'axe (AB), de côté droit $[AB]$ (i.e d'équation $y\sqrt{b} = x^2$ et le cercle (C) de diamètre $[BC]$.
Soit D leur point d'intersection et soient G projection de D sur (AB) et E sa projection sur (BC) et soit $x = DG = EB$ et $y = DE = BG$.



Al-Kayyam montre, grâce aux propriétés des coniques, que la distance DG est solution de léquation $x^3 + bx = c$.
On peut remarquer que les quantités DE et DG représentent, ce que les mathématiciens appelleront plus tard, les coordonnées du point D dans un repère d'origine B d'axes (BA) et (BC). L'apport essentiel de René Descartes (français, 1596-1650) a été de concevoir les

opérations sur les nombres indépendamment de la géométrie. Avant Descartes, le produit de deux nombres représentait nécessairement l'aire d'un rectangle. Descartes envisage géométriquement toutes les opérations sur les nombres sans faire référence ni aux aires , ni aux volumes.

La Multiplication.

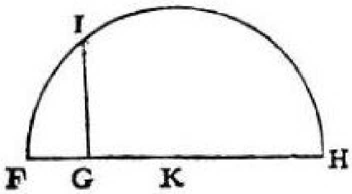


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction dela racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Grâce à l'apparition de l'algèbre, la notion d'équation de courbe (c'est-à-dire une relation algébrique entre une abscisse notée x et une ordonnée notée y) prenait forme comme nous l'entendons aujourd'hui. Une grande révolution est née : les courbes sont vues par leurs équations et non plus par un système mécanique. C'est aussi à cette époque que **Pierre de Fermat** (français, 1607-1665) s'intéressa à déterminer les tangentes à une courbe.

Le terme coordonnées n'est pas encore utilisé. **Blaise Pascal** (français, 1623-1662) qui utilisa avec brio ce nouvel outil dans l'étude de sa roulette, ne parla que d'ordonnée. Il faudra attendre **Jean Le Rond d'Alembert** (français, 1717-1783) et son encyclopédie pour définir abscisse et ordonnée.

> COORDONNÉES, adj. pl. (*Géom.*) on appelle de ce nom commun les abscisses & les ordonnées d'une courbe (*Voyez* Abscisses & Ordonnées), soit qu'elles fassent un angle droit ou non. La nature d'une courbe se détermine par l'équation entre ses *coordonnées*. *Voyez* Courbe. On appelle *coordonnées rectangles*, celles qui font un angle droit. (*O*)

On peut remarquer de d'Alembert ne parle que de coordonnées d'une courbe et non d'un point.
Avec Descartes est née la géométrie analytique. Il a montré que l'on pouvait résoudre des problèmes de nature géométrique en effectuant des calculs. Il faut cependant attendre l'avènement de la notion de fonction, grâce à **Leonard Euler** (suisse, 1707-1783) pour que les coordonnées se définissent pour un point, notamment avec la notion de courbe représentative d'une fonction.