Chapitre 7 : Généralités sur les fonctions

1 Premières définitions

Définition 1 : fonction

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est un procédé, qui, à chaque réel x de I fait correspondre un nombre réel, au plus.

Notation

On note : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

Remarques

Quand on veut signifier que la variable est réelle et que son image est aussi réelle, on parle de fonction numérique à variable réelle.
On peut définir des fonctions du plan dans le plan. La variable est alors un point du plan ainsi que son image comme les translations, les symétries, ...

Définition 2 : ensemble de définition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On appelle ensemble de définition de la fonction f l'ensemble de tous les réels x de I pour lesquels le réel $f(x)$ existe.

Exemple 1

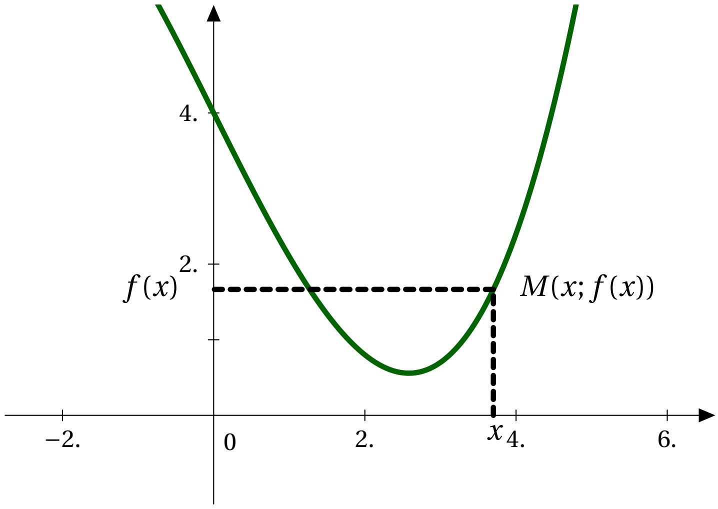
Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

1. $f_1(x) = \dfrac{5}{3x+2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{4x+1}{5x-2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{4x+1}{x^2-4x+3}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^2+1}{-3x^2+5x-2}$
5. $f_6(x) = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$
6. $f_6(x) = \sqrt{-2x-3}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-5x+1}}$
8. $f_8(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$
9. $f_9(x) = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

Définition 3 : courbe représentative

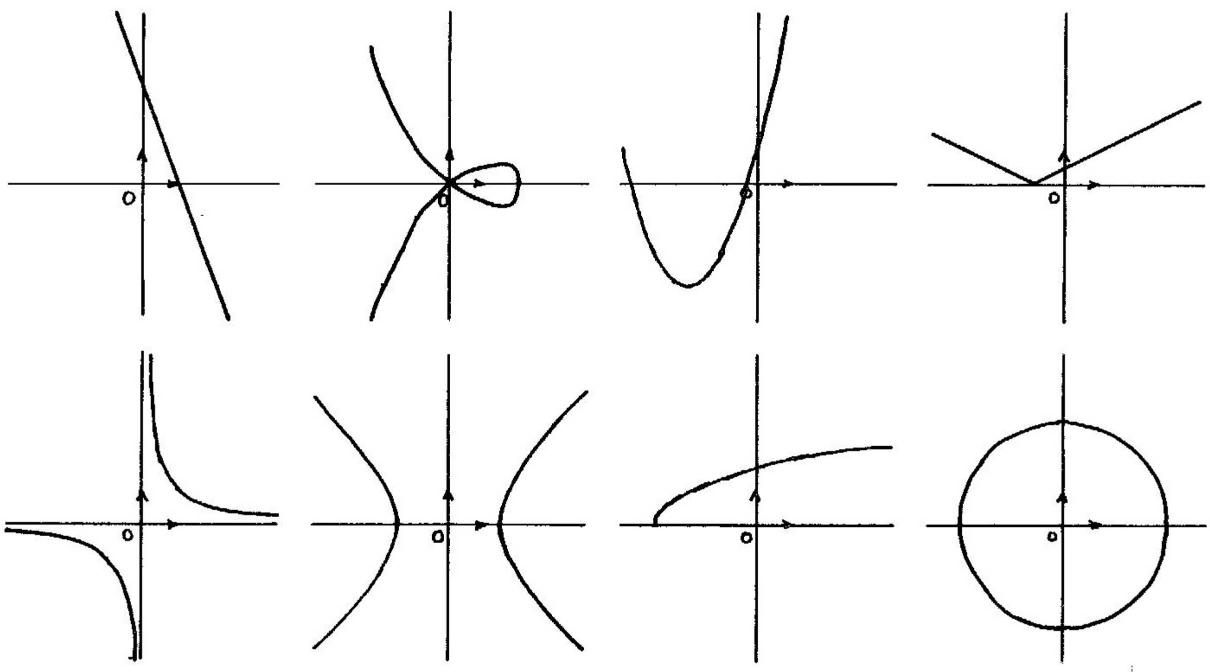
Soit f une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f$.
On appelle courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f, l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \text{et} \quad y = f(x).$$



Remarque
La courbe représentative d'une fonction ne peut avoir qu'au maximum deux points d'intersection avec toute droite verticale.

Exemple 2
Déterminer, parmi les courbes ci-dessous, celles qui sont représentatives d'une fonction. Dans ce cas, déterminer graphiquement l'ensemble de définition.



2 Parité, périodicité et monotonie

2.1 Parité

Définition 4 : ensemble symétrique par rapport à 0

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0, si, pour tout x de D, alors $-x$ appartient à D.

Exemples 3
Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont symétriques par rapport à 0.

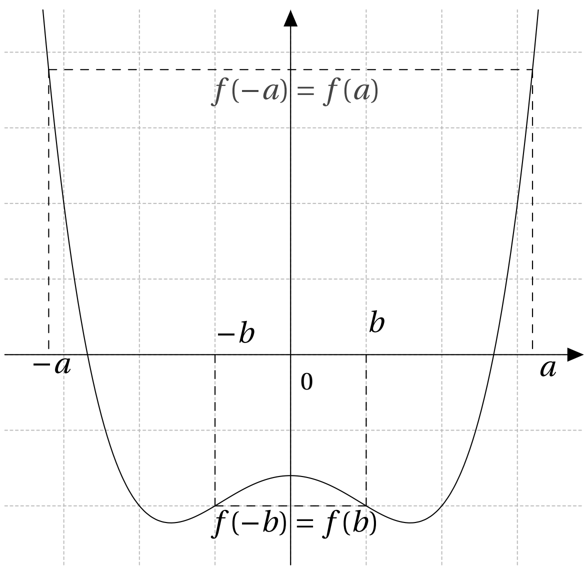
1. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$
2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$
3. $D = [-3;-1] \cup [1;3]$
4. $D = [-4;-2] \cup [1;4]$

Définition 5 : parité

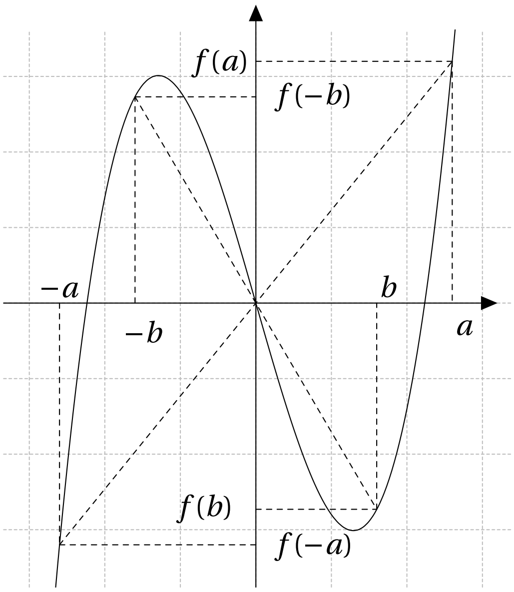
Soit f une fonction réelle, on note $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.
- On dit que la fonction f est **paire** si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = f(x)$
- On dit que la fonction f est **impaire** si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = -f(x)$

Remarques :
- Les termes « fonction paire » et « fonction impaire » proviennent du fait que les fonctions définies par $f(x) = x^n$ sont paires si et seulement si n est pair (comme $x \longrightarrow x^2$) et sont impaires si et seulement si n est impair (comme $x \longrightarrow x^3$).

- La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exemple 4
Étudier la parité des fonctions suivantes :

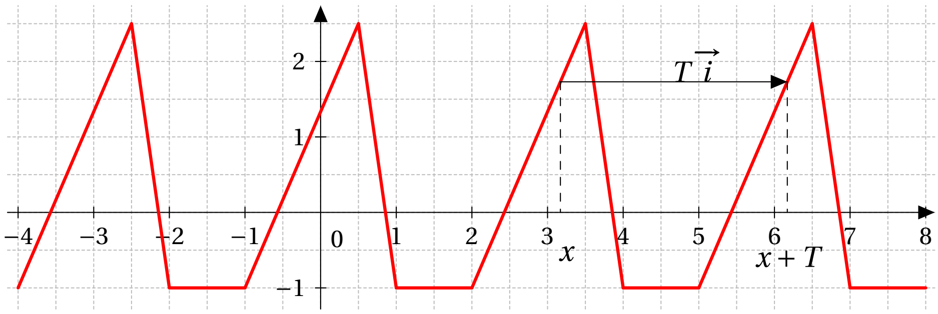
1. $f_1(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x+3)}$
2. $f_2(x) = \dfrac{7}{2x-1}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
4. $f_4(x) = 3x+2$
5. $f_5(x) = 3x^4 - x^2 + 2x$
6. $f_6(x) = \dfrac{3x}{x^2+5}$
7. $f_7(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$
8. $f_8(x) = x\sqrt{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{5x}{x^2+3}$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+1}$

2.2 Périodicité

Définition 6 : périodicité

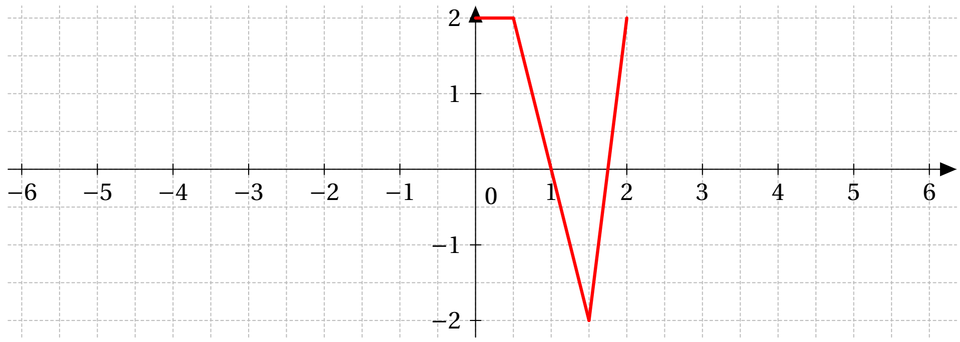
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}^*$.
On dit que la fonction f est périodique de période T si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$

Remarques :
- Si T est une période de f alors nT est aussi une période de f pour tout $n \in \mathbb{Z}$
- La courbe représentative d'une fonction périodique de période T dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est invariante par translation de vecteur $nT\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

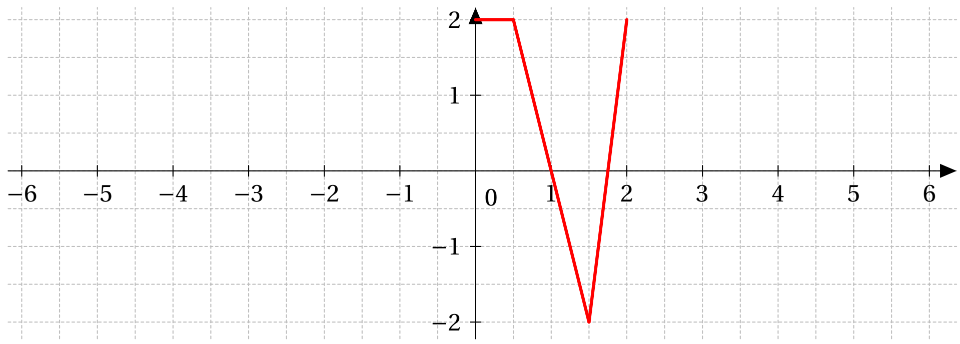


Exemple 5

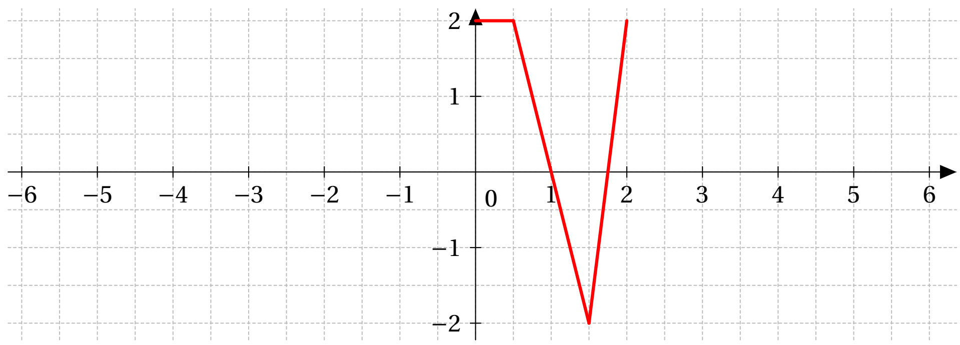
1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2.
   Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée sur $[0,2]$ ci-dessous.
   Compléter la courbe représentative sur $[-6,6]$.



2. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 4.
   Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée sur $[0,2]$ ci-dessous.
   Compléter la courbe représentative sur $[-6,6]$.



3. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 4.
   Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée sur $[0,2]$ ci-dessous.
   Compléter la courbe représentative sur $[-6,6]$.



2.3 Monotonie

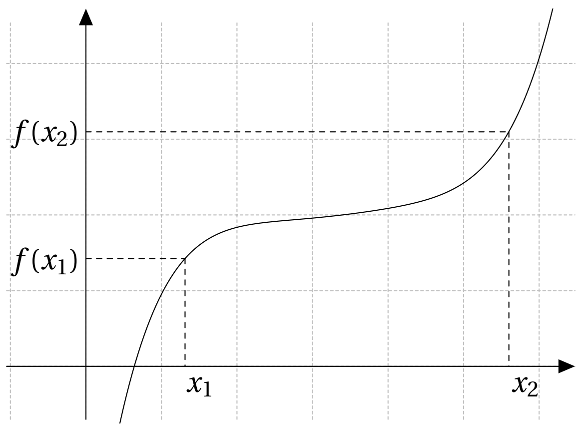
Définition 7 : fonction croissante, décroissante

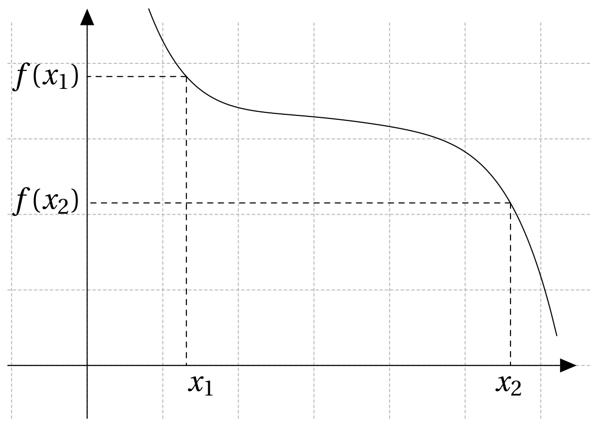
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **croissante** (resp strictement croissante) sur $[a,b]$ si, pour tous x_1, x_2 de $[a,b]$ on a :
  si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$)
- La fonction f est dite **décroissante** (resp strictement décroissante) sur $[a,b]$ si, pour tous x_1, x_2 de $[a,b]$ on a :
  si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (resp $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)
- Si f est croissante ou décroissante sur $[a,b]$ alors on dit que f est **monotone** sur $[a,b]$

Remarque :
Une fonction croissante respecte l'ordre, une fonction décroissante renverse l'ordre.

Interprétation graphique
La courbe d'une fonction croissante "monte", celle d'une fonction décroissante "descend".





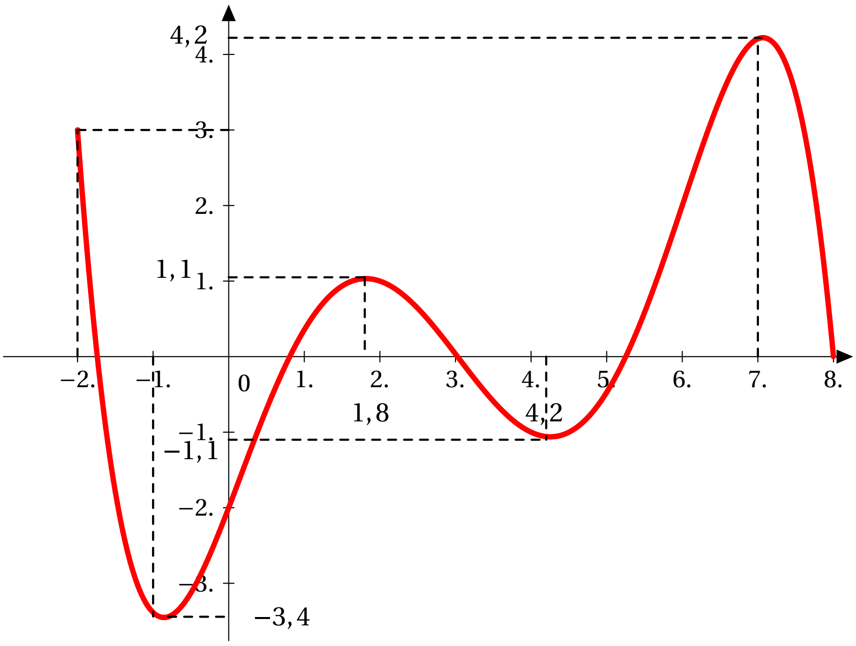
Définition 8 : maximum ou minimum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

- f admet un **maximum** en x_0 sur $[a,b]$ si, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$
- f admet un **minimum** en x_0 sur $[a,b]$ si, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$

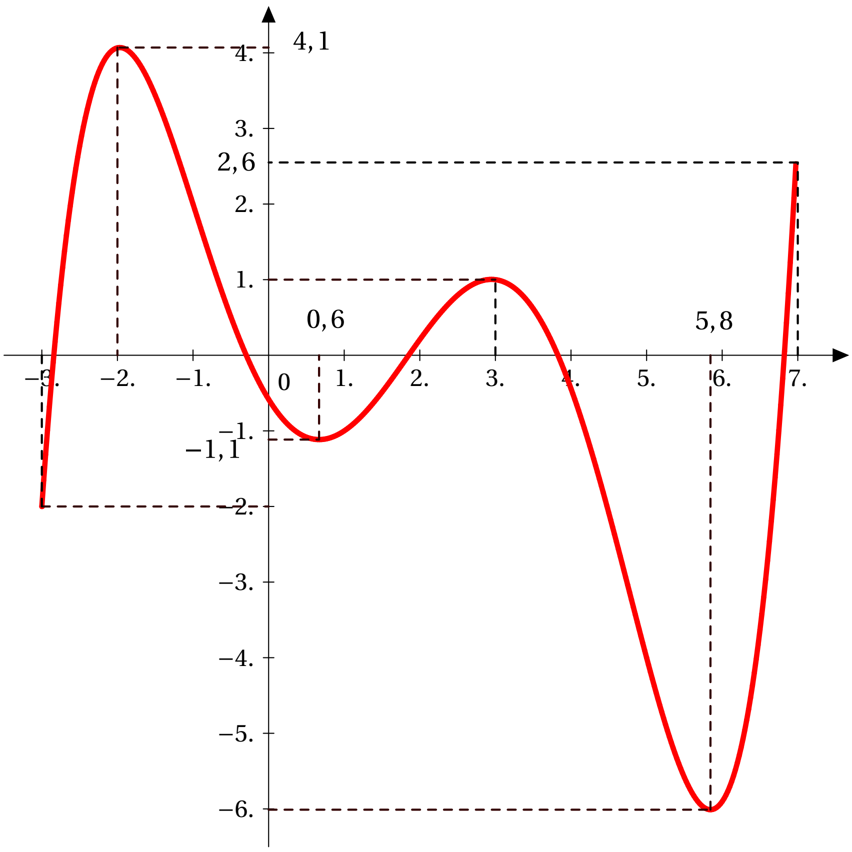
Exemple 6

1. On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,8]$.
   Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f sur chacun des intervalles suivants :
   a. $I = [-2\,;\,8]$
   b. $I = [-2\,;\,0]$
   c. $I = [-1\,;\,3]$
   d. $I = [4\,;\,7]$
   e. $I = [0\,;\,8]$
   f. $I = [7\,;\,8]$
   g. $I = [-2\,;\,-1]$



2. Mêmes questions avec la courbe et les intervalles suivants :

- **a.** $I = [-3\ ;\ 7]$
- **b.** $I = [-3\ ;\ 3]$
- **c.** $I = [-2\ ;\ 1]$
- **d.** $I = [0\ ;\ 6]$
- **e.** $I = [2\ ;\ 7]$
- **f.** $I = [-2\ ;\ 6]$
- **g.** $I = [-1\ ;\ 4]$
- **h.** $I = [-3\ ;\ 0]$
- **i.** $I = [4\ ;\ 7]$



3 Fonctions usuelles

3.1 Fonction carré

Définition 9 : fonction carré

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Propriété 1 : propriétés de la fonction carré

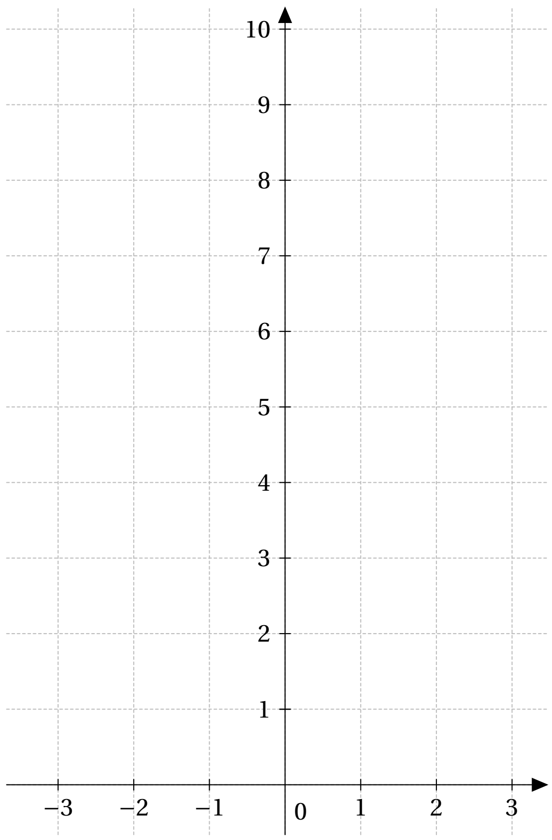
- La fonction carré est paire
- La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$
- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty, 0]$
- La fonction carré admet un minimum en 0 égal à 0 sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Tableau de valeurs et représentation graphique

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0													



3.2 Fonction inverse

Définition 10 : fonction inverse

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriété 2 : propriétés de la fonction inverse

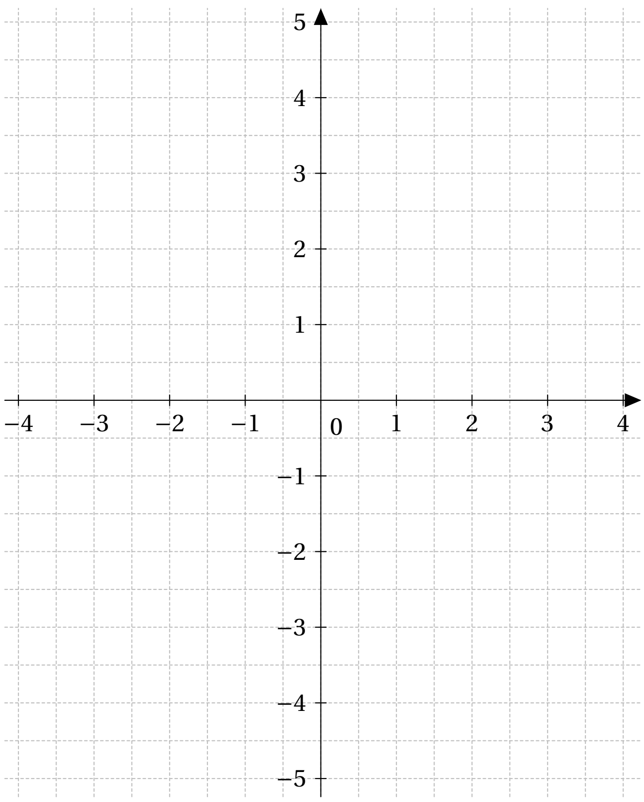
- La fonction inverse est impaire
- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		‖	

Tableau de valeurs et représentation graphique

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	$-0,2$	$0,2$	$0,5$	1	2	3	4
$\dfrac{1}{x}$												



3.3 Fonction racine carrée

Définition 11 : fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

Tableau de variations

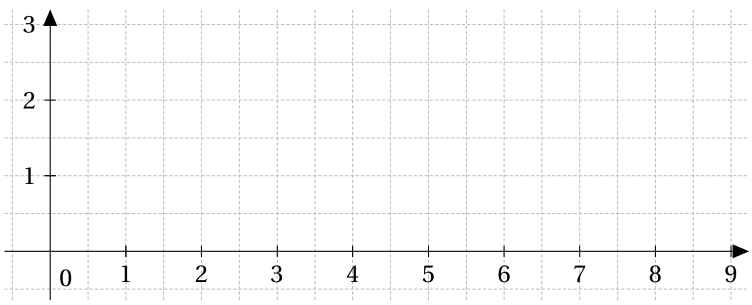
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		

Propriété 3 : propriété de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est croissante sur $[0,+\infty[$.

Tableau de valeurs et représentation graphique

x	0	$0,25$	$0,5$	1	$1,5$	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$													



3.4 Fonction cube

Définition 12 : fonction cube

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

Propriété 4 : propriétés de la fonction cube

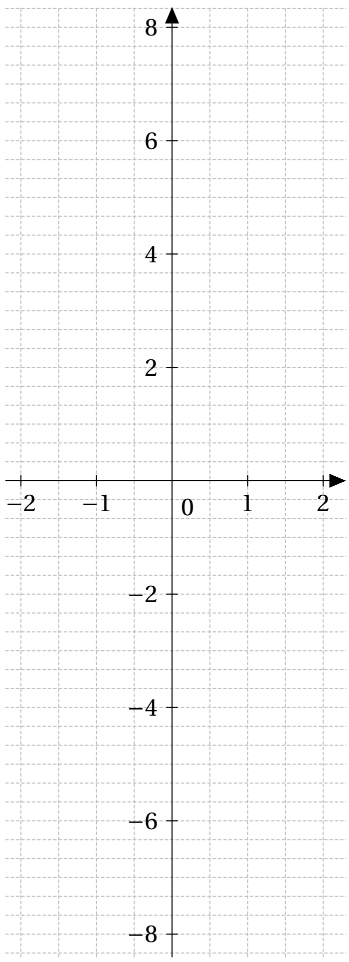
- La fonction cube est impaire
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$ $+\infty$
x^3	

Tableau de valeurs et représentation graphique

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
x^3									



3.5 Fonction valeur absolue

Définition 13 : fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

On note $|x|$ la valeur absolue de x.

Propriété 5 : propriétés de la fonction valeur absolue

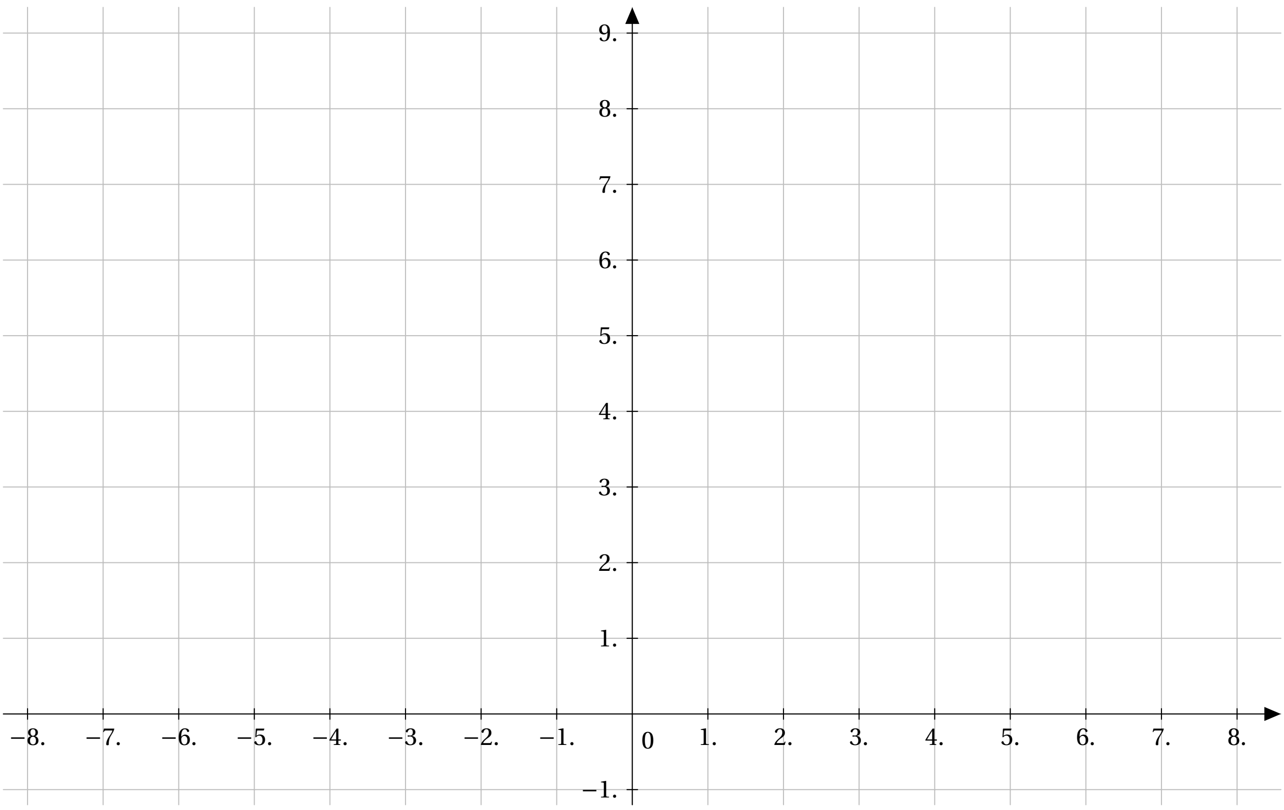
- La fonction valeur absolue est paire
- La fonction valeur absolue est croissante sur $[0, +\infty[$
- La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty, 0]$
- La fonction valeur absolue admet un minimum en 0 égal à 0 sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$			

Tableau de valeurs et représentation graphique

x	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8
$\lvert x\rvert$									



Exemple 7
Compléter les inégalités suivantes.

1. Si $x \geqslant 2$ alors $x^2 \geqslant ...$
2. Si $0 < x \leqslant 4$ alors $x^2 ...$
3. Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} ...$
4. Si $x \leqslant -4$ alors $\frac{1}{x} ...$
5. Si $x \geqslant 4$ alors $\frac{1}{x} ...$
6. Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x ...$
7. Si $x^2 < 9$ alors $x ...$
8. Si $x^3 > 8$ alors $x ...$
9. Si $\sqrt{x} > 5$ alors $x ...$
10. Si $x \geqslant 4$ alors $|x| ...$
11. Si $|x| \leqslant 2$ alors $x ...$

4 Équations et inéquations

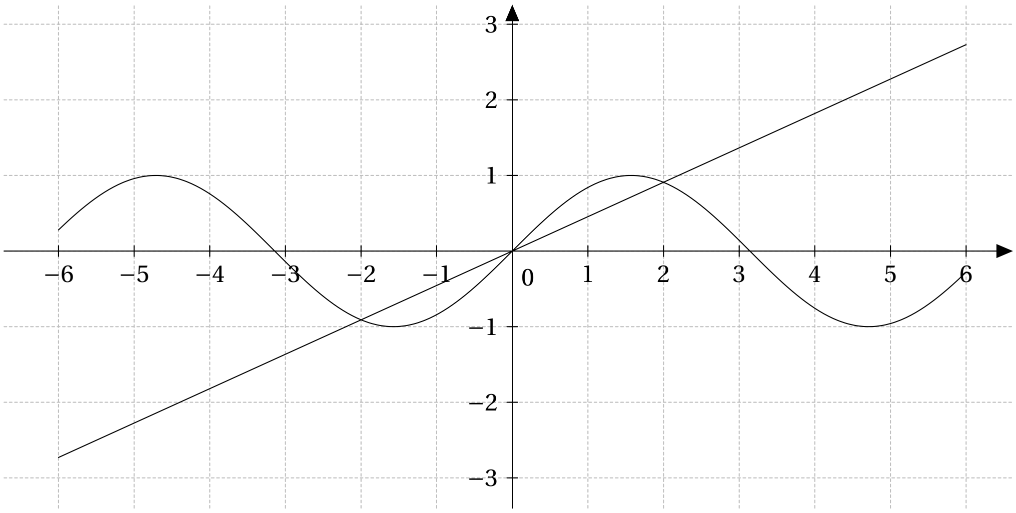
Propriété 6 : position relative de courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle, et soient $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leur courbe représentative dans un repère du plan.

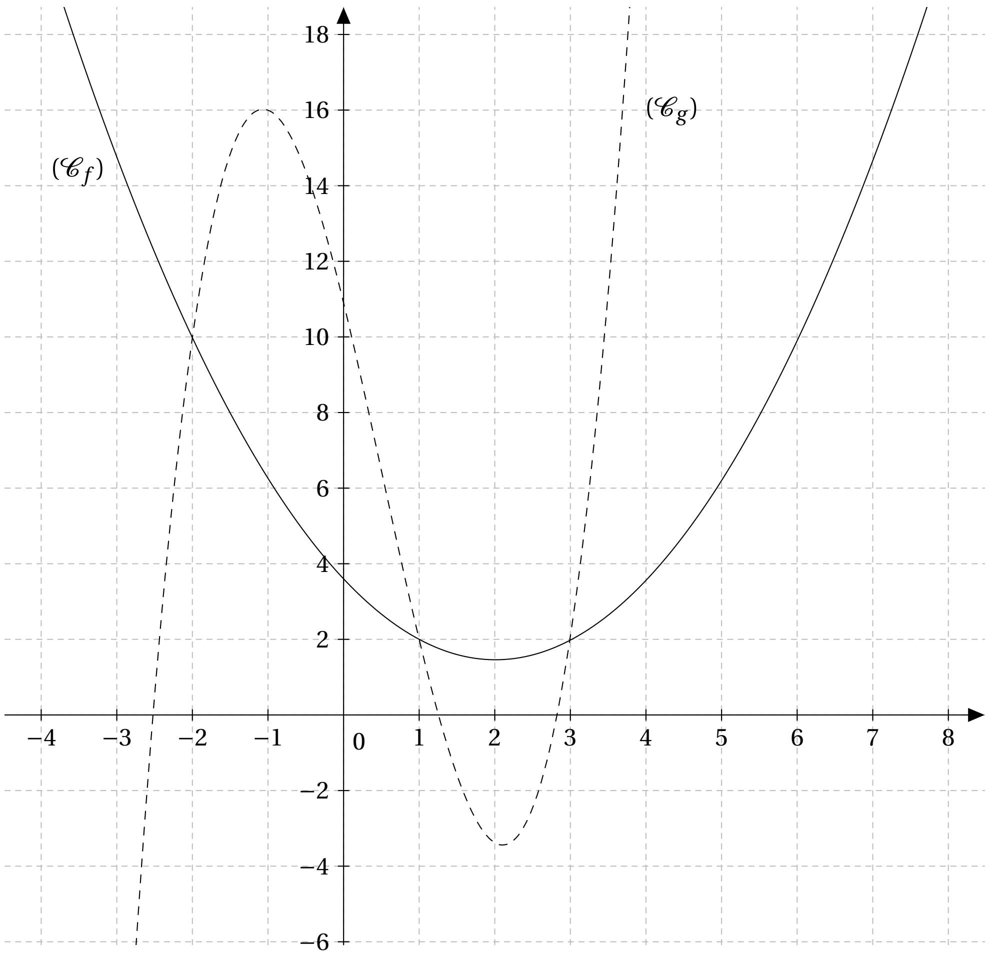
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points pour lesquels $(\mathscr{C}_f)$ est en-dessous de $(\mathscr{C}_g)$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points pour lesquels $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$

Exemple 8
Déterminer la position relative de la courbe de la fonction f et de la courbe de la fonction g dans chacun des deux cas :

1. La fonction f est la fonction linéaire et g l'autre fonction. Ces deux fonctions sont définies sur l'intervalle $[-6\,;\,6]$.



2. La courbe de la fonction f est tracée en trait plein et celle de la fonction g en pointillés.



Exemple 9
Déterminer la position relative de la courbe de la fonction f et de la courbe de la fonction g dans chacun des deux cas :

1. La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et la fonction g par $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.
2. La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et la fonction g par $g(x) = x+3$.

5 Composition de fonctions

Définition 14 : composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.
Soit g une fonction définie sur J à valeurs dans un intervalle K.
Alors on définit la fonction $g \circ f$ par : $\begin{array}{l} I \longrightarrow K \\ x \longmapsto g\big(f(x)\big) \end{array}$
Ainsi pour tout $x \in I$: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Exemple 10
Écrire $g \circ f$ et $f \circ g$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -x + 7$
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$
4. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Exemple 11
Les fonctions suivantes s'écrivent sous la forme $g \circ f$. Déterminer dans chaque cas les fonctions f et g, ainsi que le domaine de définition de $g \circ f$

1. $\sqrt{x^2 + 1}$
2. $\dfrac{1}{3x^2 - 2}$
3. $\sqrt{3x - 4}$
4. $\sqrt{\dfrac{1}{x^3 - 1}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$

Propriété 7 : variations d'une fonction composée

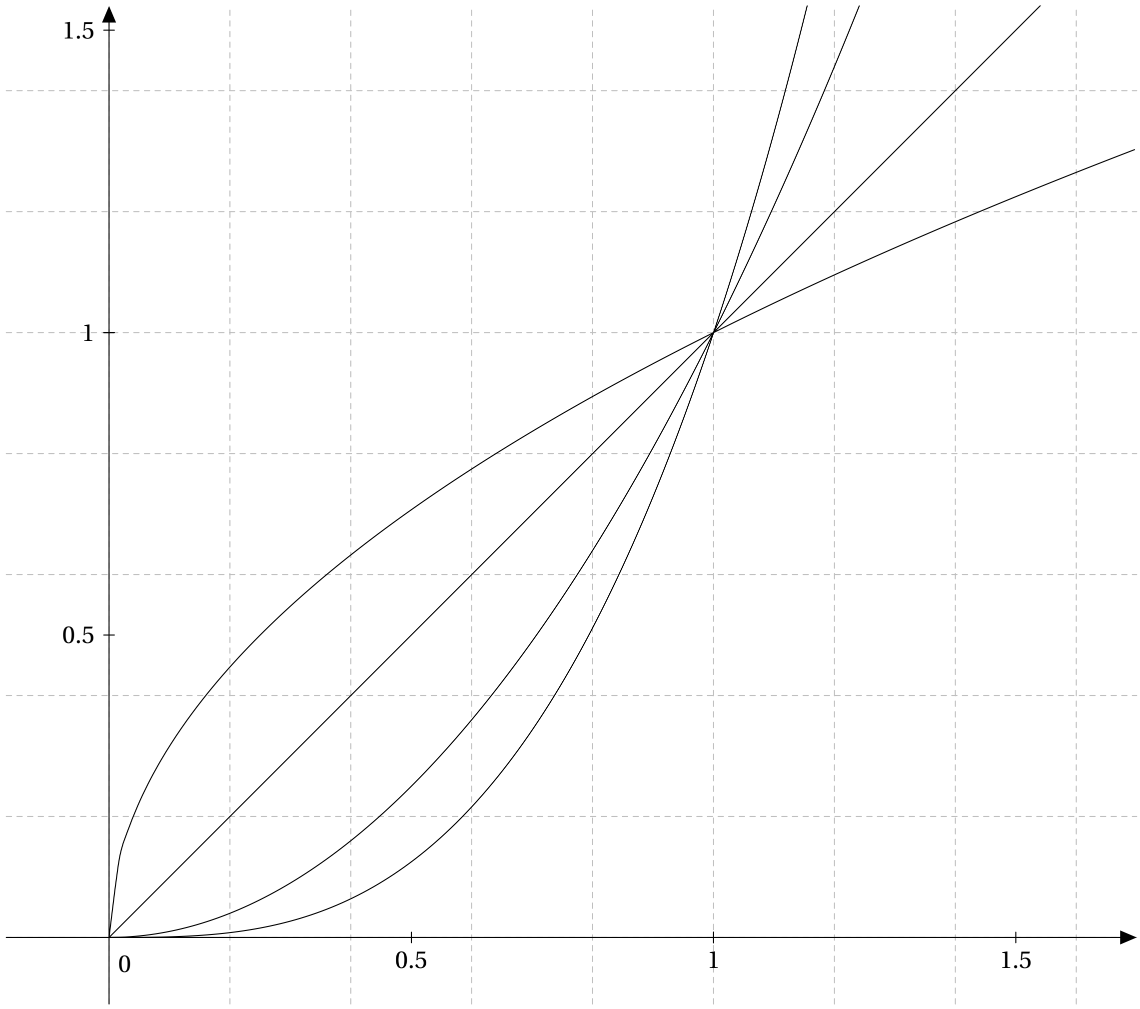
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et g une fonction définie sur J.

- Si f et g ont le même sens de variations alors $g \circ f$ est croissante sur I
- Si f et g ont des sens de variations contraires alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple 12
Dans chaque cas, utiliser la propriété précédente pour déterminer le sens de variations des fonctions en précisant soigneusement l'intervalle sur lequel on travaille.

1. $f(x) = \sqrt{4-2x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $f(x) = (x+3)^3$
4. $f(x) = (-2x+7)^2$
5. $f(x) = \sqrt{x^2-8x+17}$
6. $f(x) = \left(x^2-1\right)^3$

Exemple 13
On a tracé ci-dessous les représentations graphiques des fonctions :
$f : x \longmapsto x$ $\quad g : x \longmapsto x^2$ $\quad h : x \longmapsto x^3$ $\quad i : x \longmapsto \sqrt{x}$



1. Identifier chaque courbe
2. En utilisant le graphique, classer les nombres x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ en fonction des valeurs de x
3. Pour $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, classer les nombres suivants : $2x+1$, $(2x+1)^2$, $(2x+1)^3$, $\sqrt{2x+1}$

Un peu d'histoire

Le mot « fonction » vient du latin *functio* qui signifie accomplir, exécuter, s'acquitter d'une obligation.
La notion de fonction mathématique a été très longue à émerger au cours de l'histoire et pendant très longtemps les mathématiciens manipulaient des fonctions sans les avoir définies de façon précise.
Dans les textes égyptiens ou babyloniens, on retrouve des traces de notion de fonction sous la forme d'un algorithme. Par exemple, dans l'extrait ci-dessous d'une tablette babylonienne, on découvre un algorithme donnant l'inverse d'un nombre. cet algorithme est effectué pour plusieurs exemples.

Première partie de la tablette (début détruit) :

2 [Le nombre est 4;10. Quel est son inverse ?
Procède comme suit.
Forme l'inverse de 10, tu trouveras 6.
Multiplie 6 par 4, tu trouveras 24.
Ajoute 1, tu trouveras 25.
Forme l'inverse de 25], tu trouveras 2;24.
[Multiplie 2;24 par 6], tu trouveras 14;24.
[L'inverse est 14;24]. Telle est la façon de procéder.

3 [Le nombre est 8;20]. Quel est son inverse ?
[Pro]cède comme suit.
Forme l'inverse de 20], tu trouveras 3.
Mul[tiplie 3 par 8], tu trouveras 24.
[Ajoute 1], tu trouveras [25].
[Forme l'inverse de 25], tu trouveras 2;24.
[Multiplie 2;24 par 3], tu trouveras [7;12.
L'inverse est 7; 12. Telle est la façon de procéder].

4 [Le nombre est 16;40. Quel est] son inverse ?
[Pro]cède comme suit.
Forme [l'inverse de 6;40], tu trouveras 9.
Multiplie [9] par 10, tu trouveras 1;30.
[Aj]oute [1], tu trouveras 2;30.
Forme [l'inverse de 2];30, tu trouveras 24.
[Multiplie 24 par 9, tu trouveras 3;36.
L'inverse est 3;36. Telle est la façon de procéder].

A cette époque, la fonction apparaît sous la forme d'une correspondance entre grandeurs ou nombres. Nous sommes dans un cadre numérique.
Au XIV^{e} siècle apparaît nettement la notion de fonction. Nicole **D'Oresme** (mathématicien français 1320-1382) introduit la notion de représentation graphique et classe les fonctions d'après leur représentation. Par exemple, il distingue les fonctions affines croissantes, les fonctions constantes qu'il appelle respectivement "qualité uniformément difforme terminé à un degré nul" et "qualité uniformément difforme terminée de par et d'autre à un certain degré".

fig. 4.33.

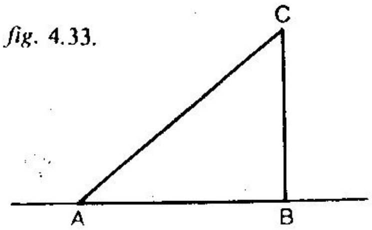
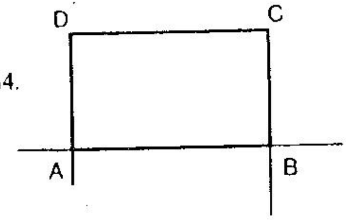


fig. 4.34.



Figures extraites de son livre "Sur la configuration des qualités" 1350

Au XVI^e siècle, les représentations des fonctions par des formules apparaissent grâce à la création de l'algèbre littérale et symbolique par François **Viete** (mathématicien français 1540-1603). C'est une nouvelle approche de la notion de fonction mais les anciennes sont encore en vigueur : fonctions introduites verbalement, par un graphe, par la cinématique ou des tables. Les mathématiques sont perçues comme langage exprimant les réalités physiques de la nature : « le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique » (**Galilée** mathématicien italien 1564 - 1642).

Au XVII^e siècle, Isaac **Newton** (mathématicien anglais 1642-1707) appelle « fluentes » les quantités variables et « fluxions » les vitesses avec lesquelles les fluentes sont augmentées. Gottfried Wilhelm **Leibniz** introduit le mot fonction dans le contexte très particulier de la détermination de tangentes. Il a aussi introduit les mots : constante, variable, paramètre, coordonnées.

Les premières définitions de la notion de fonction apparaissent au XVIII^e siècle avec Jean **Bernouilli** (mathématicien suisse 1667 - 1748) : « on appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. » Il note alors ϕx.
Leonhard **Euler** (mathématicien suisse 1707 - 1783) propose la définition suivante en 1748 dans son ouvrage *Introduction in analysis infinitorum* : « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes » . Il a complété la définition de Jean Bernouilli en ajoutant le mot analytique. Ce terme désigne ici une expression obtenue à partir d'une combinaison d'opérations et de modes de calcul connus (opérations algébriques usuelles, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques), certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre infini de fois.

2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'enſuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils ſoient. Il en eſt de la quantité variable, comme du genre & de l'eſpece à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embraſſant toutes les quantités déterminées. Au reſte, on a coutume de repréſenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorſqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puiſqu'on peut lui ſubſtituer tous les nombres imaginables. La ſignification d'une quantité variable ne peut être cenſée épuiſée, qu'autant qu'on aura conçu en ſa place toutes les valeurs déterminées. Ainſi une telle quantité comprend tous les nombres tant poſitifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui ſont rationnels, irrationnels & tranſcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; c^z ; &c, ſont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable eſt donc auſſi une quantité variable.*

Extrait de l'Introductio in analysin infinitorum d'Euler (1748)

Partant de là, Euler établit une classification des fonctions sur la base des opérations et modes de calcul utilisés : « Je les ai d'abord divisées en algébriques et transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois ».
Suite à la résolution du problème des cordes vibrantes, Euler conçoit de nouveau le concept de fonction : « Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x »

Il faut attendre encore beaucoup d'années pur que le concept de fonction se précise. Ainsi Hermann **Hankel** (mathématicien allemand 1839 - 1873) écrit en 1870 : « On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x. ».
On peut noter que Hankel ne considère que des fonctions numériques à variables réelles et que la relation fonctionnelle peut ne pas pouvoir s'exprimer de façon explicite par une formule.

Enfin grâce aux travaux de Nicolas **Bourbaki** (groupe de mathématiciens français) on peut donner une définition très générale de la notion de fonction : « Soient E et F deux ensembles distincts ou non ; une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle de Evers F, si pour tout x appartenant à E, il existe au plus un élément y appartenant à F qui soit en relation avec x. »
Cette définition peut alors s'appliquer à toutes sortes de fonctions (numériques à variable réelle, numérique à variable entière, géométrique où la variable est un point du plan ou de l'espace, ...).