Chapitre 8 : Dérivation

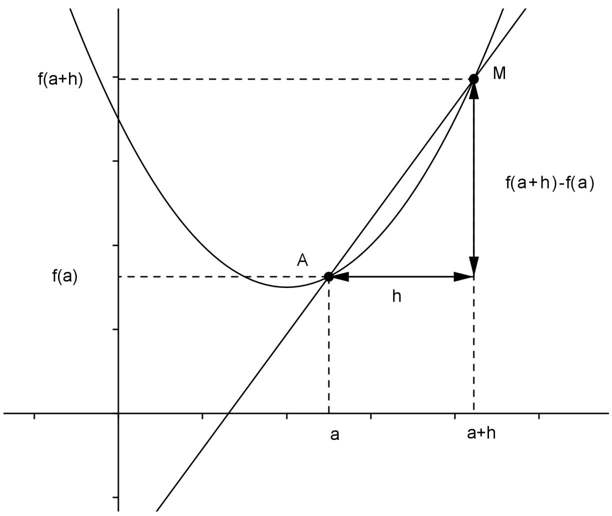
1 Premières définitions

Définition 1 : nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un point quelconque de I.
On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
Cette limite est appelée nombre dérivé en a et notée $f'(a)$.

Remarques

1. Les expressions $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ et $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ont la même limite quand h tend vers zéro.
2. L'expression $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$.
   Dire que f est dérivable en a revient à dire le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
   L'expression $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) où A est le point de la courbe d'abscisse a et M celui d'abscisse $a+h$.



3. Il est impératif que la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 soit finie pour que la fonction f soit dérivable en a.

Exemple 1

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction "cube" au point 2.
2. Même question avec la fonction "carré" au point 2.
3. Démontrer que la fonction "racine carrée" est dérivable en 1.
4. Démontrer que la fonction "inverse" est dérivable en $a \neq 0$.
5. La fonction "racine carrée" est-elle dérivable en 0 ?

Propriété 1 : dérivabilité et approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un point quelconque de I.
• La fonction f en dérivable en a si et seulement s'il existe un nombre A et une fonction φ telle que $f(a+h)=f(a)+Ah+h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.
• Le nombre A est alors le nombre dérivé de la fonction f en a.
• $f(a)+hf'(a)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a.

Exemple 2
A l'aide de cette propriété, déterminer le nombre dérivé des fonctions suivantes en a

1. $f(x)=x^3$
2. $f(x)=x^4$

Exemple 3
A l'aide de cette propriété, déterminer l'approximation donnée pour

1. $2,01^2$
2. $3,004^3$
3. $\dfrac{1}{4,003}$

Définition 2 : nombre dérivé à droite et à gauche

Si $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en a et on note $f'_d(a)$, cette limite, appelée « nombre dérivé à droite » en a.
On définit de même le nombre dérivé à gauche.

Exemple 4
Déterminer si les deux fonctions suivantes sont dérivables à droite en zéro.

1. $f(x)=\sqrt{x}$
2. $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

Définition 3 : fonction dérivable sur un intervalle

Soit I=$]a;b[$ un intervalle ouvert.
On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle dérivable en tout point de cet intervalle.
Si I est un intervalle fermé avec $I=[a;b]$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle dérivable en tout point de $]a;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Définition 4 : fonction dérivée

On appelle fonction dérivée de la fonction f dérivable sur l'intervalle $I=]a;b[$, la fonction, notée f', définie pour tout $x\in I$, par $x\longrightarrow f'(x)$.
Si l'intervalle $I=[a;b]$ est fermé, alors on rajoute par définition $f'(a)=f'_d(a)$ et $f'(b)=f'_g(b)$.

Exemple 5
Déterminer les dérivées des fonction suivantes :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{x}$

2 Dérivation et opérations

Propriété 2 : dérivée des fonctions usuelles

Lorsque les nombres dérivés existent, on a les résultats suivants :

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
$x^n (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 3 : dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. La somme $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
2. Le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
3. Le produit par une constante k est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
4. Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors le quotient $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Propriété 4 : dérivées et compositions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. Si la fonction u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
2. Si la fonction u est strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
3. Soit n un entier relatif. La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (Attention, si $n < 0$, il faut vérifier que u^n (donc u) ne s'annule pas sur I).

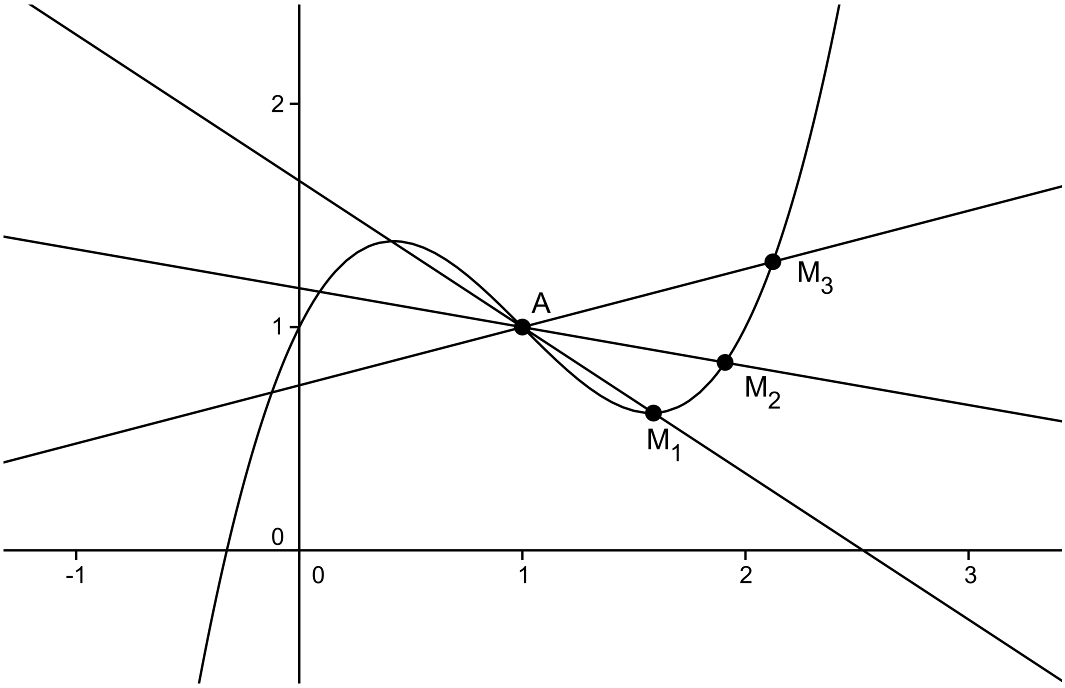
Exemple 6
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + \frac{3}{x}$
2. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3} + 3\sqrt{x}$
3. $f(x) = (2x+3)^2$
4. $f(x) = x\sqrt{x}$
5. $f(x) = \frac{3x+1}{5x-3}$
6. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-3}$
7. $f(x) = \sqrt{3x+1}$
8. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{3+2x}$
9. $f(x) = (3x+1)^5$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$
11. $f(x) = \sqrt{2x-3}$
12. $f(x) = \sqrt{3x^2-2x+5}$
13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3 Interprétation graphique

Définition 5 : tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un point de I où f est dérivable en a.
On appelle tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a la droite passant par M et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarques
La tangente à une courbe en un point A est la position limite de la droite (AM) lorsque M se rapproche de A (M étant toujours sur la courbe).

Exemple 7
Déterminer une équation de la tangente au point A d'abscisse a des courbes d'équation $y = f(x)$ dans les cas suivants :

1. $a = 1$ et $f(x) = x^2 + 5x - 2$
2. $a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{2x+3}{5x+1}$
3. $a = 4$ et $f(x) = \sqrt{x}$
4. $a = -3$ et $f(x) = 2x^3 + \frac{4}{x}$

4 Dérivation et variations

Propriété 5 : dérivée et variations

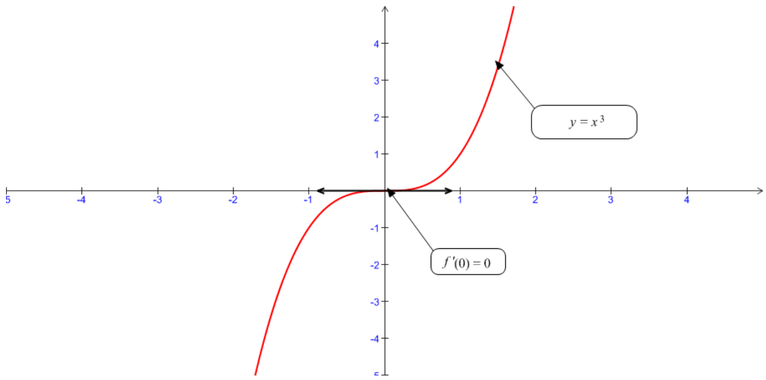
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
• Si f est croissante sur I, alors $f' \geqslant 0$ sur I.
• Si f est décroissante sur I, alors $f' \leqslant 0$ sur I.
• Si f est constante sur I, alors $f' = 0$ sur I.

Propriété 6 : variation et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
• Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
• Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
• Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
• Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
• Si la dérivée f' est strictement négative sur I,sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques

1. Les trois premières affirmations de la propriété 6 constituent la propriété réciproque de la propriété 5.
2. La fonction "cube" est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.



3. En étudiant le signe de la dérivée d'une fonction, on obtient les variations de la fonction.

Exemple 8
Déterminer les variations des fonctions f suivantes sur leur ensemble de définition :

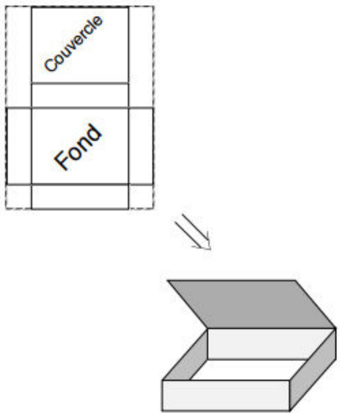
1. $f(x) = x(1-x)$
2. $f(x) = x^3 - x$
3. $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$
4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Remarque
Savoir déterminer les variations d'une fonction permet de résoudre les problèmes d'optimisation : déterminer les valeurs optimales d'une quantité soumise à certaines contraintes.
La démarche de résolution d'un tel type de problème se déroule en plusieurs étapes :
– Choix des inconnues
– Mathématisation du problème
  – On exprime la quantité à optimiser en fonction des inconnues
  – Si jamais la quantité dépend de plusieurs (par exemple n) variables, on cherche $n-1$ équations reliant ces n variables et on exprime alors la quantité à optimiser en fonction d'une seule variable.

- Résolution
  - On détermine l'ensemble de définition de la fonction
  - On étudie les variations de la fonction sur son ensemble de définition
  - On en déduit le maximum ou le minimum
- Conclusion
  On rédige une conclusion au problème d'optimisation

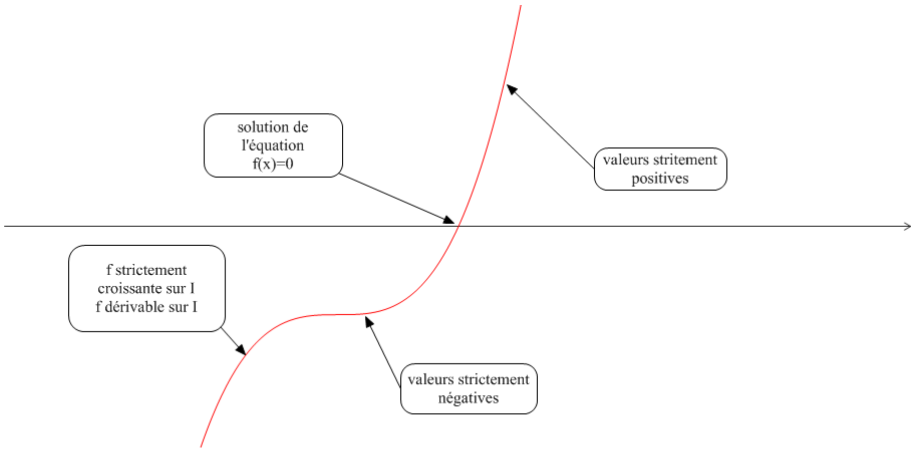
Exemple 9
Les deux questions sont indépendantes.

1. $ABCD$ est un carré de côté 1. On considère un point M sur le segment $[AB]$.
   On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi droite $[BC)$ à l'extérieur du segment $[BC]$.
   La droite (MN) coupe (DC) en P.
   Déterminer la position du point M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.
2. On dispose d'une feuille de carton rectangulaire dont les dimensions sont 48×35 cm. On y découpe le patron représenté ci-dessous que l'on referme selon les plis pour créer une boîte avec son couvercle.
   Déterminer le volume maximal de la boîte ainsi construite.



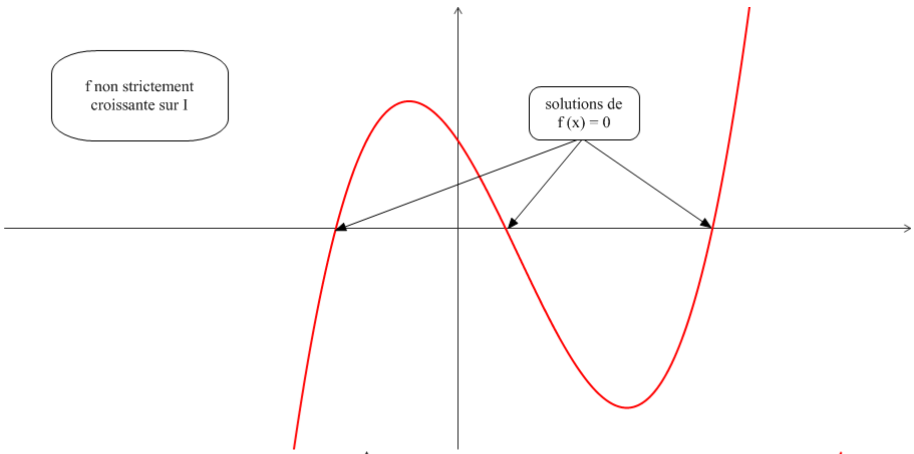
Propriété 7 : solutions d'équation

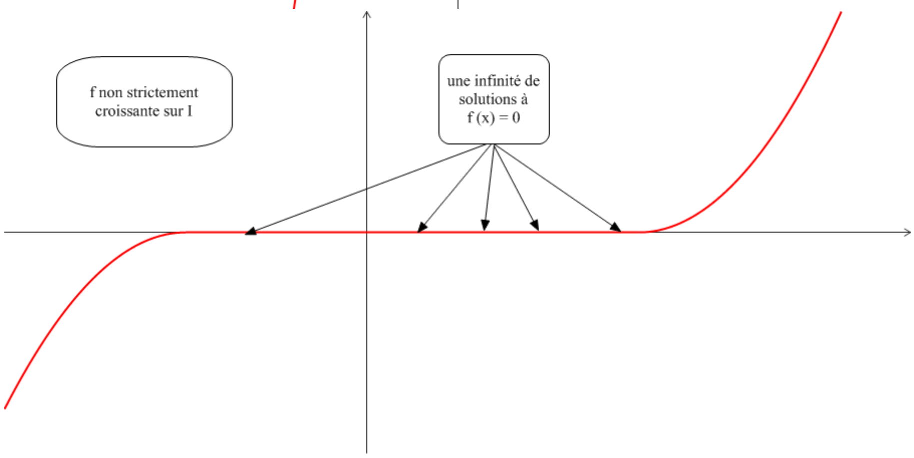
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
Si la fonction f est strictement croissante sur I et si elle prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives sur I, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.
Si la fonction f est strictement décroissante sur I et si elle prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives sur I, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.



Remarques

Si la fonction f n'est pas strictement monotone sur I, l'équation $f(x) = 0$ peut admettre plusieurs solutions.





Exemple 10

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1 = 0$.
   On donnera une valeur approchée par défaut de chaque solution à 10^{-3} près.
2. Même question avec $x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 5 = 0$.

5 Résumé : à quoi sert la dérivée ?

1. **à déterminer les variations d'une fonction**
   (en étudiant le signe de la dérivée)

   Exemple 10-1 : Déterminer les variations de la fonction f définie par
   $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

2. **à déterminer une équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction f**
   (le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f'(a)$.

   Exemple 10-2 : Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe d'équation $y = x^4 - 2x + 3$.

3. **à déterminer la meilleure approximation affine d'une fonction f au voisinage d'un nombre a**
   ($f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h voisin de 0)

   Exemple 10-3 : Déterminer la meilleure approximation affine de f définie par
   $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 1.

4. **à modéliser la notion de vitesse**

   Exemple 10-4 : Déterminer la vitesse instantanée à l'instant $t = 1$ d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne où $x(t) = 3t^2 + 5t + 1$ désigne la loi horaire.

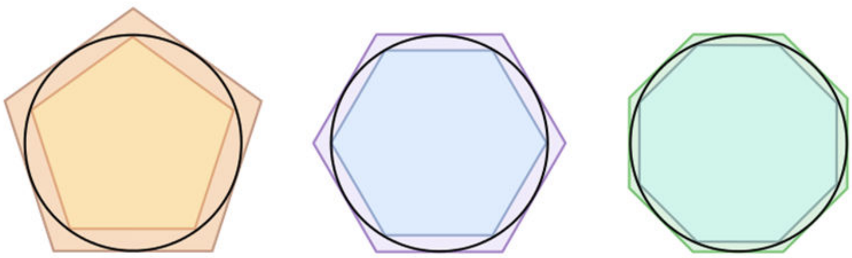
Un peu d'histoire

La quadrature

Les mathématiques antiques étaient essentiellement composées de géométrie. Si les aires et volumes des figures simples et bien droites sont faciles à trouver, calculer l'aire d'une forme quelconque est difficile en utilisant les outils classiques de la géométrie. **Archimède** de Syracuse (- 287 , - 212 avant J.C), peut-être le meilleur mathématicien de l'antiquité, donna des procédés rigoureux de calcul pour certaines paraboles et hyperboles. Les procédés des géomètres, cependant, restaient bornés à des cas particuliers. Il n'y avait pas de méthode générale.

D'après la légende, un soldat romain aurait assassiné Archimède lors de la conquête de Syracuse, après que celui-ci lui ait récriminé de marcher sur les cercles qu'il avait dessiné dans le sable.

Comment démontraient par exemple les Grecs que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré du rayon ? Il suffit d'approcher le disque par des polygones réguliers avec de plus en plus de côtés. L'aire a alors tendance à coïncider avec celle du disque, et comme l'aire d'un polygone est proportionnelle au carré du rayon, il en va de même pour celle du disque. C'est la quadrature : approcher des figures courbes par des figures droites :



Méthode des polygones inscrits et circonscrits

L'approche informelle

L'obscurantisme médiéval a un effet dévastateur sur la science européenne. La théologie ne permet pas d'avancée ni d'innovation majeure, et les pays arabes deviennent le pôle scientifique mondial. Ce n'est qu'avec la Renaissance que les travaux des Grecs sont redécouverts par les Européens, après deux-mille ans d'étude par les savants Arabes. Les travaux d'**Archimède** sur la quadrature sont ainsi repris, et compris petit à petit. En parallèle, certains mathématiciens européens se posent des questions sans lien apparent : comment déterminer la tangente à une courbe donnée en un point ? (c'est-à-dire la droite qui ne coupe la courbe qu'en ce point) Existe-t-il un procédé général pour trouver les maxima et les minima d'une fonction ? Le bordelais Pierre **de Fermat** (1607 - 1665) est le premier à donner une méthode qui résout les deux problèmes :

Pierre de Fermat

Toute la théorie de la recherche de maximums et minimum suppose l'utilisation de deux inconnues et de la seule règle suivante :

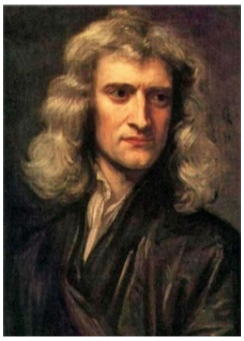
1. Soit a une inconnue du problème (à une, deux ou trois dimensions, selon convienne au problème).
2. On exprimera la quantité maximale ou minimale au moyen de termes ne dépendant que de a, à un degré arbitraire. — Ceci revient à calculer $f(a)$.
3. On substituera à la suite l'inconnue a par $a+e$, et on exprimera la quantité maximale au moyen de $a+e$ et de ses puissances, à un degré arbitraire. — Ceci revient à calculer $f(a+e)$.
4. On pseudo-égalisera les deux expressions de la quantité maximale ou minimale. — On écrit la pseudo-égalité : $f(a) \approx f(a+e)$.
5. On éliminera les termes communs aux deux côtés. Il en résultera des termes dépendant de e ou de ses puissances.
6. On divisera tous les termes par e ou par une quelconque de ses puissances, de façon à éliminer le e d'au moins un des termes qui apparaissent des deux côtés de l'égalité. — On divise par e : $\frac{f(a+e)}{e} \approx \frac{f(a)}{e}$.
7. On supprimera à continuation tous les termes contenant du e, pour obtenir une équation ne dépendant que de a. — On fait $e = 0$.
8. La résolution de cette dernière équation fournira la valeur de a, qui conduira à celle du maximum ou du minimum grâce à l'expression initiale. — On résout $\frac{f(a+e)-f(a)}{e} \approx 0$.

Methodus, Fermat

C'est tout sauf rigoureux ! Comment peut-on, par exemple, diviser par e si $e = 0$? Qu'est-ce que « pseudo-égaliser » ? Si la méthode de Fermat laisse entrevoir la définition moderne de la dérivée, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, la notion de limite n'est clairement pas aperçue par le mathématicien, qui se limite à une résolution algébrique comme si $e = 0$. D'ailleurs, Fermat

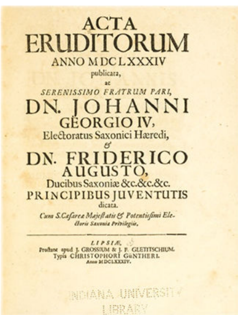
n'utilise pas du tout la notion de fonction : il ne parle que de quantités.
A peu près au même moment, le mathématicien italien **Cavalieri** (1598 - 1647) développe son concept d'indivisible : les droites peuvent être considérées comme une infinité de points, les surfaces comme une infinité de droites etc. de sorte que les longueurs et les aires sont vues comme une somme de petits éléments infiniment fins, ou indivisibles. Voici un retour au problème de la quadrature.
Il faut attendre l'anglais Isaac **Newton** (1643 - 1727) et l'allemand Gottfried **Leibniz** (1646 - 1716) pour la découverte du calcul infinitésimal, de façon indépendante.


Gottfried Leibniz


Isaac Newton

Les approches sont assez différentes :

1. Newton, qui parle de *fluxion* pour se référer à la variation d'une quantité, s'intéresse au comportement de la fonction quand celle-ci approche du point x. Il utilise donc ce que l'on connait aujourd'hui comme « approximation affine » :
$$(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 \approx 2xh$$
Et donc la dérivée de x^2 est $2x$. A chaque fois, les termes de degré supérieur sont négligés. Cette « pseudo-égalisation », derrière laquelle se cache la notion de limite, est mal comprise à l'époque : pourquoi peut-on dire $h^2 = 0$ sans pour autant dire $h = 0$?
2. Leibniz développe la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, voyant dans la dérivée un accroissement (infiniment petit) de la fonction par rapport à la variable lorsque celle-ci augmente d'une quantité infiniment petite. Son idée est donc de voir la courbe comme une infinité de petits segments collés les uns aux autres, tout comme Archimède voyait le cercle comme un polygone à une infinité de côtés (un « infinigone »). Il développe les règles de dérivation du produit et du quotient. Le manque de rigueur est aussi visible dans ses démonstrations, dans lesquelles les quantités apparaissent et disparaissent quand on en a envie, comme dans la méthode de Fermat. Ainsi :
$$(f+\mathrm{d}f)(g+\mathrm{d}g) - fg = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f + \mathrm{d}f\mathrm{d}g \approx f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$$
Et donc $(fg)' = f'g + fg'$. Mais comment faire $\mathrm{d}f\mathrm{d}g = 0$ si $\mathrm{d}f \neq 0$ et $\mathrm{d}g \neq 0$? De nos jours, on dirait que $\mathrm{d}f \times \mathrm{d}g$ est négligeable à la limite, ce qui justifie qu'on ne tienne compte que des autres termes, qui sont prédominants.



"Acta Eruditorum", de Leibniz, et "The Method of Fluxions and Infinite Series", de Newton ouvrages fondateurs du calcul différentiel.

La découverte du calcul laisse aussi l'une des plus aigres querelles de l'histoire de la science, entre les partisans de Newton et ceux de Leibniz. Une querelle sans trop de sens, car l'invention de cet outil est le résultat du travail de beaucoup de savants pendant tout un siècle. Comme la majorité des querelles de ce type, la science ne fut qu'une excuse et les véritables raisons relevaient du patriotisme et de la politique.

De la physique à la rigueur

La méthode des dérivées s'avère un outil très fécond, et les mathématiciens ne se soucient point de sa justification. « Elle marche », pense-t-on. Elle est particulièrement utile en physique, et bonne partie de la théorie de la gravitation énoncée par Newton y est basée. En fait, les mathématiques de la Renaissance étaient très loin d'appréhender les subtilités de la notion, liées à la structure des nombres réels. Ce n'est qu'au XIXème siècle que des mathématiciens tels que le français **Cauchy** (1789 - 1857) et l'allemand **Weierstrass** (1815 - 1897) donnent des bases solides à des notions comme la dérivation en définissant proprement les nombres réels. Cette définition, qui passe par la notion de limite, nécessite de voir les quantités infinitésimales non plus comme des quantités fixes, mais comme des variables que l'on peut rendre aussi petites qu'on l'on veut, ce qui justifie que certains termes soient négligés pour rapport à d'autres, ou que l'on puisse diviser par des infinitésimaux.
Au XVIIème siècle, les infinitésimaux ont suscité des vives polémiques au sujet de leur réalité et de leur convenance mathématique. Si les motivations étaient souvent métaphysiques, les détracteurs n'avaient pas tort en soulignant la faiblesse logique du raisonnement et l'arbitraire du procédé. Depuis le XIXème, le débat est clos. C'est aussi au XIXème siècle que le lien entre variation (dérivée) et quadrature (intégrale), déjà compris dans le principe par Newton et Leibniz, est formellement établi par l'allemand **Riemann** (1826 ? 1866). Ce sont des procédés réciproques : une fonction peut être calculée en « additionnant » toutes les petites variations entre deux points. On a ainsi passé de l'infinitésimal au macroscopique.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Bernhard Riemann (1826-1866)

Karl Weierstrass (1815-1897)