Chapitre 9 : Les nombres complexes (1)

1 Le plan complexe

1.1 Notion de nombre complexe

Propriété 1 : existence des nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient les nombres réels.
2. Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes.
3. Il existe un nombre complexe noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

Définition 1 : forme algébrique d'un nombre complexe

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée forme algébrique du complexe z.
x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et y sa partie imaginaire, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Vocabulaire : Lorsque $y = 0$, z est réel et lorsque $x = 0$, z est imaginaire pur.

Propriété 2 : égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

1.2 Représentation géométrique

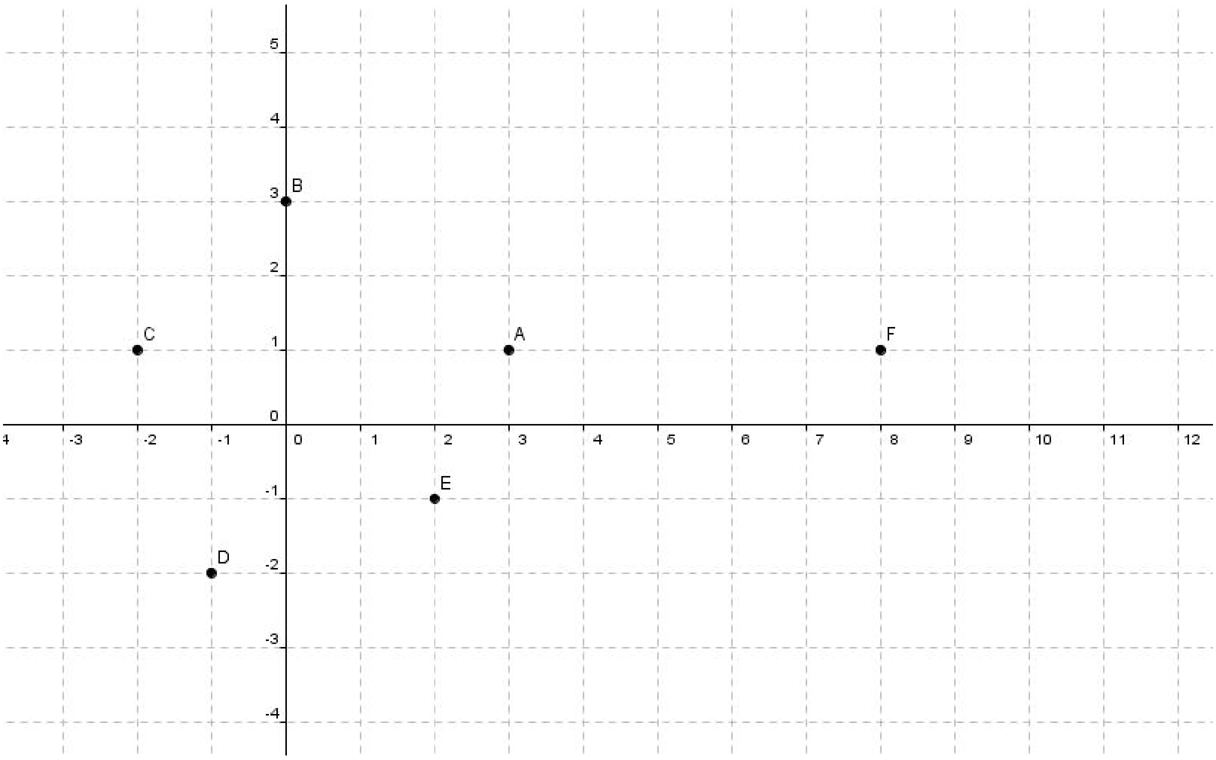
Définition 2 : affixe d'un point ou d'un veteur

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. A tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe l'unique point M de coordonnées $(x; y)$.
2. On dit que M est le point image de z.
3. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et on note $M(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(z)$.
4. Le plan est alors appelé plan complexe.

Exemple 1

1. Dans le plan complexe muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, lire les affixes des points A, B, C, D, E et F :
2. Placer les points $G(1+\mathrm{i})$, $H(-2)$,$I(-2\mathrm{i})$, $K(5-3\mathrm{i})$ et $L\left(-3-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$



2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Somme et produit dans $\mathbb{C}$

Propriété 3 : somme et produit de deux nombres complexes

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, en tenant compte du fait que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Les propriétés de distributivité et donc les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$.
z et z' étant des nombres complexes,on a $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

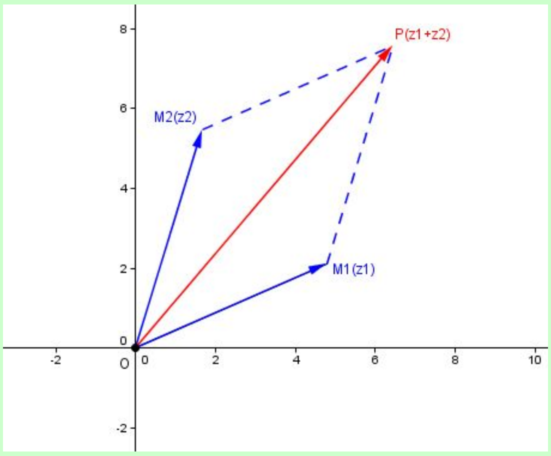
Exemple 2
Calculer et donner les formes algébriques.

1. $A = (1+2\mathrm{i}) - (-1+2\mathrm{i})$
2. $B = (3+5\mathrm{i}) + (1-\mathrm{i})$
3. $C = (1-3\mathrm{i}) + (4+3\mathrm{i})$
4. $D = (-2+5\mathrm{i}) - (2+4\mathrm{i})$
5. $E = \mathrm{i}(1+\mathrm{i})$
6. $F = (4+\mathrm{i})(-5+3\mathrm{i})$
7. $G = -2\mathrm{i}(-1+2\mathrm{i})^2$
8. $H = (2-5\mathrm{i})^2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$
9. $I = \mathrm{i}^3(5+2i)$
10. $J = (1+\mathrm{i})^2(1-\mathrm{i})^2$
11. $K = (1+2\mathrm{i})^3$
12. $L = (3-\mathrm{i})^2(5+\mathrm{i})^2$

2.2 Interprétation géométrique

Propriété 4 : afiixes de nombres complexes et parallélogramme

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 d'images respectives M_1 et M_2 dans le plan complexe. Alors le nombre complexe $z_1 + z_2$ a pour image le point P, quatrième sommet du parallélogramme OM_1PM_2.



Définition 3 : affixe d'un veteur

Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ un vecteur du plan.
A $\overrightarrow{u}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de $\overrightarrow{u}$.
On le note $z_{\overrightarrow{u}}$.

Propriété 5 : affixe des vecteurs somme et produit par un réel

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2.

1. Alors le vecteur $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.
2. Quel que soit le **nombre réel** k, le vecteur $k\overrightarrow{u_1}$ a pour affixe kz_1.

Propriété 6 : affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu de [AB]

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

1. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. On le note $z_{\overrightarrow{AB}}$.
2. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple 3 :

1. Dans le plan complexe,soit $A(3+\mathrm{i})$, $B(2-2\mathrm{i})$, $C(2\mathrm{i})$ et $D(1+5\mathrm{i})$.
   Réaliser une figure puis montrer de deux façons différentes que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Même question avec les points $A(2-5\mathrm{i})$, $B(-3+2\mathrm{i})$, $C(-1+3\mathrm{i})$ et $D(4-4\mathrm{i})$

2.3 Inverse et quotient

Propriété 7 : inverse d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe z non nul admet un inverse.

Exemples 4

1. Écrire sous forme algébrique les inverses de $z_1=\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ et $z_2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
2. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_3=\dfrac{1-5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ et $z_4=\dfrac{1+4\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}$.
3. Écrire sous forme algébrique les inverses de $z_5=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}$ et $z_6=\dfrac{4+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$.

Exemples 5
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}z-2\mathrm{i}=(2-\mathrm{i})z+1$
2. $z+\mathrm{i}=4z-\mathrm{i}(z-2)$
3. $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$
4. $\dfrac{z+3\mathrm{i}}{-5\mathrm{i}z+2}=-\mathrm{i}$
5. $(1+2\mathrm{i})z+\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}-5+2\mathrm{i}=-2+2\mathrm{i}$
6. $(-8+3\mathrm{i})z+\dfrac{6z}{1-\mathrm{i}}+8-2\mathrm{i}=-15-3\mathrm{i}$

3 Conjugué d'un nombre complexe

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 4 :cxonjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$.
Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Exemple 6
Écrire sous forme algébrique les conjugués de $2+3i$, 4, $2i$ et $\dfrac{1+i}{1-2i}$

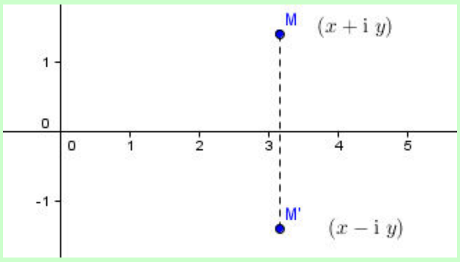
Propriété 8 : premières propriétés du conjugué

1. $\overline{\left(\overline{z}\right)} = z$.
2. $z.\overline{z} = x^2 + y^2$.
3. $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$.
4. $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}(z)$.
5. z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
6. z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

3.2 Interprétation géométrique

Propriété 9 : affixe du conjugué

Dans le plan complexe, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple 7

1. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.
2. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z - \overline{z}^2$ soit réel.

3.3 Conjugués et opérations

Propriété 10 : conjugués et opérations

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

1. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$.
2. $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.
3. $\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$.
4. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
5. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Exemple 8
Déterminer la forme algébrique des conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -5\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})$
2. $z_2 = (8-2\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})$
3. $z_3 = (1-3\mathrm{i})^3$
4. $z_4 = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
5. $z_5 = \dfrac{(3-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})}$

Exemple 9
Soit M le point d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 3 = 0.$$
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$z\overline{z} - (1+3\mathrm{i})z + (-1+3\mathrm{i})\overline{z} + 5 = 0.$$
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$\left(1+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)z + \overline{\left(1+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)}\overline{z} + 2 = 0.$$
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$z(1+3\mathrm{i}) - \overline{z}(3\mathrm{i}-1) + 1 = 0.$$

4 Équations du second degré à coefficients réels

4.1 Équations du type $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Propriété 11 : solutions de l'équation $z^2 = a$

Quel que soit le nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$, ce sont les réels $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
2. Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs $-i\sqrt{-a}$ et $i\sqrt{-a}$.

Exemple 10

1. Soit $m \in \mathbb{R}$.
   Montrer que l'équation $z^2 = -3m^2 + m - 2$ admet deux solutions complexes conjuguées.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$.
   Résoudre l'équation $z^2 = -2m^2 + 5m + 12$.

4.2 Équations du type $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*, (b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Propriété 12 : solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*, (b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On note Δ le discriminant et ω un nombre complexe tel que $\Delta = \omega^2$.
L'équation admet toujours deux solutions $z_1 = \dfrac{-b+\omega}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\omega}{2a}$.

Remarques
Si $\Delta = 0$, les deux racines z_1 et z_2 sont confondues. (l'équation a une racine double).
Si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes conjuguées.

Exemple 11
Résoudre l'équation $P(z) = 0$ et en déduire une factorisation de $P(z)$

1. $P(z) = 3z^2 - 6z + 30$.
2. $P(z) = 9z^2 - 30z + 34$
3. $P(z) = 8z^2 - 24z + 18$.
4. $P(z) = 25z^2 - 30z + 9$
5. $P(z) = 15z^2 - 11z + 2$
6. $P(z) = 8z^2 - 14z - 15$
7. $P(z) = z^3 - 2z^2 - 2z - 3$.
8. $P(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10$

Exemple 12

1. Soit M un point d'affixe z et on note $z' = \dfrac{z+1}{z-1}$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   a. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
   c. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.
2. Mêmes questions avec $z' = \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}$.
3. Mêmes questions avec $z' = \dfrac{z-3+4\mathrm{i}}{z+1-2\mathrm{i}}$.