

Exemple 1

$$1) \quad u_n = \frac{1}{2n+1} \quad \text{par } n \geq 0.$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{5}$$

$$u_3 = \frac{1}{7}$$

$$3) \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{par } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{2u_0 + 3}{u_0 + 4} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{2u_1 + 3}{u_1 + 4} = \frac{2 \times \frac{3}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \frac{\frac{18}{4}}{\frac{19}{4}} = \frac{18}{19}$$

$$u_3 = \frac{2u_2 + 3}{u_2 + 4} = \frac{2 \times \frac{18}{19} + 3}{\frac{18}{19} + 4} = \frac{\frac{36 + 57}{19}}{\frac{18 + 76}{19}}$$

$$= \frac{93}{94}$$

$$\sum \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n(n-1)} \text{ par } n \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} u_3 = u_{2+1} &= u_2 - \frac{2}{2(2-1)} \\ &= 4 - \frac{2}{2 \times 1} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4 = u_{3+1} &= u_3 - \frac{2}{3(3-1)} \\ &= 3 - \frac{2}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_5 = u_{4+1} &= u_4 - \frac{2}{4(4-1)} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2}{12} = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2

1) $u_n = n(n-1)$ par $n \geq 0$

a) $u_{n+1} = (n+1)(n+1-1) = n(n+1)$

$$u_n + 1 = n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$$

$$u_{2n} = 2n(2n-1)$$

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= (n-1)(n-1-1) \\ &= (n-1)(n-2) \end{aligned}$$

b) $u_{n+1} = (n+1)n = n^2 + n$

$$\begin{aligned} u_n + 2n &= n(n-1) + 2n = n^2 - n + 2n \\ &= n^2 + n \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = u_n + 2n$ par tout $n \geq 0$.

3) Soit $v_n = 2^{3n+1}$

$$v_{n+1} = 2^{3(n+1)+1} = 2^{3n+4}$$

$$v_{n-1} = 2^{3(n-1)+1} = 2^{3n-2}$$

$$v_{n+2} = 2^{3(n+2)+1} = 2^{3n+7}$$

$$v_{2n} = 2^{3(2n)+1} = 2^{6n+1}$$

$$v_{2n+1} = 2^{3(2n+1)+1} = 2^{6n+4}$$

$$\underline{S)} \quad x_0 = 2 \text{ et } x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$$

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1}^2 - 1$$

$$= 2(2x_n^2 - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4x_n^4 - 4x_n^2 + 1) - 1$$

$$= 8x_n^4 - 8x_n^2 + 1.$$

Exemple 3

$$a) \quad u_{n+1} - u_n = u_n - n - u_n = -n \leq 0$$

La suite (u_n) est décroissante.

$$\leq) \quad u_n = \frac{3}{1-n} \quad \text{par } n \geq 2$$

Méthode 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{1-x}$
par $x \in [2; +\infty[$

$$\text{Ainsi } u_n = f(n)$$

$$f'(x) = 3 \times \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2} \geq 0.$$

La fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$

Ainsi la suite (u_n) est croissante.

Méthode 2

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{1-(n+1)} - \frac{3}{1-n}$$

$$= \frac{3}{-n} - \frac{3}{1-n}$$

$$= \frac{3(1-n) - 3(-n)}{-n(1-n)}$$

$$= \frac{3 - 3n + 3n}{-n(1-n)}$$

$$= \frac{3}{n(n-1)}$$

Comme $n \geq 2$ alors $n \geq 0$ et $n-1 \geq 0$

donc $\frac{3}{n(n-1)} \geq 0$.

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante.

$$e) \quad u_n = (n+1)(-2)^n \quad \text{par } n \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 1 \times (-2)^0 = 1 \\ u_1 = 2 \times (-2) = -4 \\ u_2 = 3 \times (-2)^2 = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas} \\ \text{croissante} \\ \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas} \\ \text{décroissante} \end{array}$$

La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

$$g) \quad u_n = \frac{2}{5^n} \quad \text{par } n \geq 0.$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5^{n+1}} - \frac{2}{5^n} \\ &= \frac{2 - 2 \times 5}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5^{n+1} = 5^n \times 5}$$

$$= \frac{-8}{5^{n+1}} \leq 0.$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.