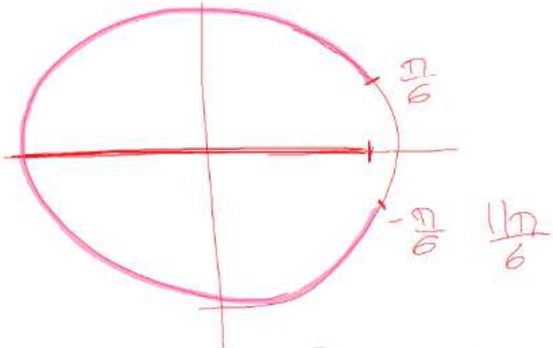
## Exemple 10

1] Soit $(I_1)$ l'inéquation : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$




$(I_1) \iff x \in \left]\frac{\pi}{6} + k2\pi ; \frac{11\pi}{6} + k2\pi\right[$

avec $k \in \mathbb{Z}$

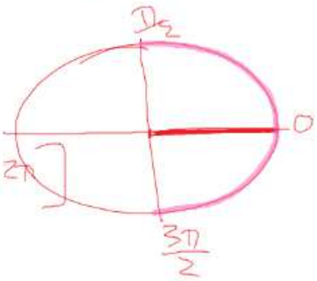
L'ensemble des solutions de $(I_1)$ est la réunion des intervalles de la forme $\left]\frac{\pi}{6} + k2\pi ; \frac{11\pi}{6} + k2\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3] Soit $(I_3)$ l'inéquation $\cos x (2\sin x + 1) \geq 0$.

On étudie le signe de chaque facteur : $\cos x$ et $2\sin x + 1$.

Ainsi • $\cos x > 0$

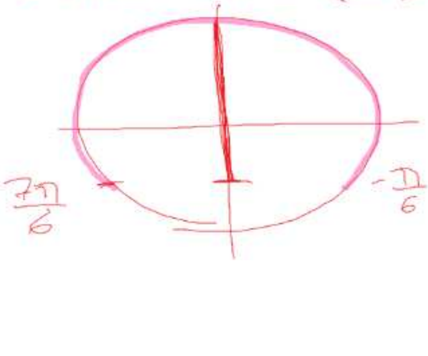
$\iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$




• $\cos x = 0$

$\iff x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

• $2\sin x + 1 > 0 \iff \sin x > -\frac{1}{2}$




$\iff x \in \left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right[ \cup \left]\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

- $2\sin x + 1 = 0 \iff x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

On dresse le tableau de signes suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{7\pi}{6}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{11\pi}{6}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2\sin x + 1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\cos x(2\sin x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de $(I_3)$ est :

$$S = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$$

## Exemple 11

1) L'ensemble de définition de $f$ est $D_f = \mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à $0$.

- $f(-x) = 1 - 8\cos(-x) - 4\cos(2\times(-x))$

$= 1 - 8\cos x - 4\cos(2x)$ car la fonction cosinus est paire.

Donc la fonction $f$ est paire.

- $f(x+2\pi) = 1 - 8\cos(x+2\pi) - 4\cos(2(x+2\pi))$

$= 1 - 8\cos x - 4\cos(2x)$ car la fonction cosinus est $2\pi$-périodique.

Donc la fonction $f$ est $2\pi$-périodique.

Donc la fonction $f$ est $2\pi$-périodique.

Comme $f$ est $2\pi$ périodique, il suffit de l'étudier sur $[-\pi;\pi]$. De plus comme elle est paire il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

2) $f'(x) = 8\sin x - 4(-2\sin(2x))$ $\quad (\cos(2x))' = -2\sin(2x)$

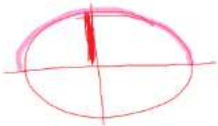
$= 8\sin x + 8\sin(2x)$

or $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \sin x \cos x$
$= 2\sin x \cos x$

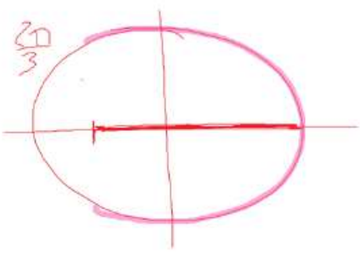
Donc $f'(x) = 8\sin x + 16 \sin x \cos x$
$= 8\sin x(1 + 2\cos x)$

3) On va étudier le signe de chaque facteur de $f'(x)$ dans $[0;\pi]$

- $\sin x > 0 \iff x \in ]0;\pi[$



- $\sin x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \pi$.
- $1 + 2\cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$




$\iff x \in ]0;\frac{2\pi}{3}[$

- $1 + 2\cos x = 0 \iff x = \frac{2\pi}{3}$

On dresse le tableau de variation suivant :

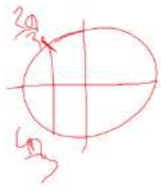
| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $8\sin x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $1+2\cos x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-11$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $5$ |

$f(0) = 1 - 8\cos 0 - 4\cos 0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - 8\cos\frac{2\pi}{3} - 4\cos\frac{4\pi}{3}$

$= 1 - 8\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 1 + 4 + 2 = 7$




$f(\pi) = 1 - 8\cos\pi - 4\cos 2\pi$

$= 1 + 8 - 4 = 5$

4) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 8\cos\frac{\pi}{4} - 4\cos\frac{\pi}{2}$

$= 1 - 8\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\times 0$

$= 1 - 4\sqrt{2}$

Le point A de tangence a pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{4} ; 1-4\sqrt{2}\right)$.

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} + 8$

La tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point A a une équation du type : $y = (4\sqrt{2}+8)x + b$

$A \in (\mathcal{T}) \iff y_A = (4\sqrt{2}+8)x_A + b$

$\iff 1 - 4\sqrt{2} = (4\sqrt{2}+8)\frac{\pi}{4} + b$

$$\iff b = 1 - 4\sqrt{2} - (\sqrt{2}+2)\pi$$

$(\mathcal{T})$ a par équation : $y = (4\sqrt{2}+8)x + 1 - 4\sqrt{2} - (\sqrt{2}+2)\pi$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 8\cos\frac{3\pi}{2} - 4\cos(3\pi)$$

$$= 1 - 0 - 4\times(-1) = 5$$

Le point B de tangence a pour coordonnées $\left(\frac{3\pi}{2} ; 5\right)$.

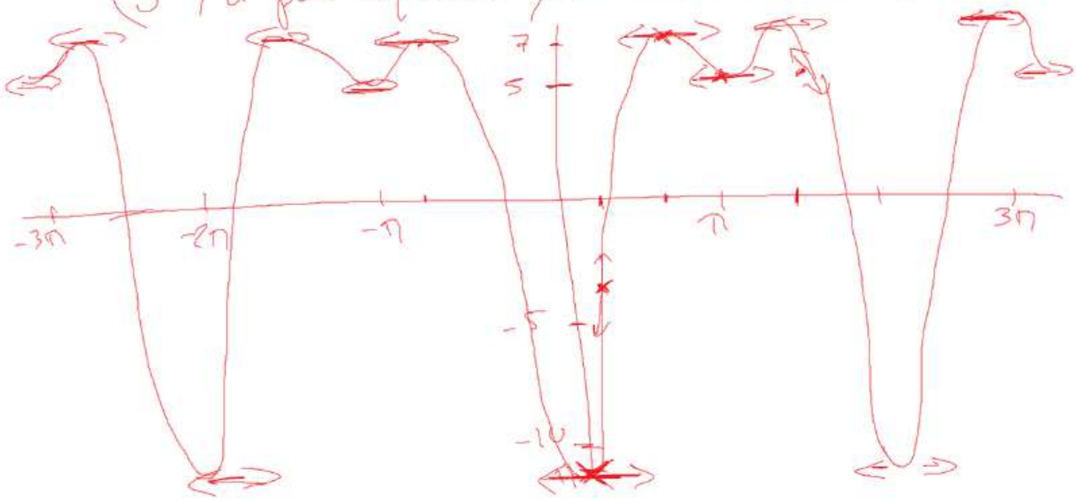
$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8\sin\frac{3\pi}{2}\left(1+2\cos\frac{3\pi}{2}\right) = -8(1+0) = -8$$

La tangente $(\mathcal{T}')$ à $(\mathcal{C})$ en B a une équation du type : $y = -8x + b$

$$B \in (\mathcal{T}') \iff 5 = -8\times\frac{3\pi}{2} + b$$

$$\iff b = 5 + 12\pi$$

$(\mathcal{T}')$ a par équation $y = -8x + 5 + 12\pi$.




5] Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = m$

- Si $m < -11$ l'équation n'a pas de solution
- Si $m = -11$ l'équation a exactement 3 solutions
- Si $-11 < m < 5$ l'équation a exactement 6 solutions
- Si $m = 5$ l'équation a exactement 10 solutions
- Si $5 < m < 7$ l'équation a exactement 12 solutions
- Si $m = 7$ l'équation a exactement 6 solutions
- Si $m > 7$ l'équation n'a pas de solution.