

Exemple 3

i) $u_n = 5n^2 + 6n - 8 \quad (n \geq 0)$

Méthode 1 Soit f la fonction définie

par $f(x) = 5x^2 + 6x - 8$

$$f'(x) = 10x + 6 \geq 0 \text{ si } x \geq 0$$

Sur $[0; +\infty[$ la fonction f est croissante

donc la suite (u_n) est croissante.

Méthode 2

$$u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 + 6(n+1) - 8 - (5n^2 + 6n - 8)$$

$$= 5(n^2 + 2n + 1) + \cancel{6n} + 6 - \cancel{8} - 5n^2 - \cancel{6n} + \cancel{8}$$

$$= 10n + 11 \geq 0$$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante.

R) $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^n \left[\frac{5}{4} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 0$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante.

$$m) \quad u_n = \frac{n}{2^n}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas décroissante}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ u_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas croissante.}$$

La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Exemple 4

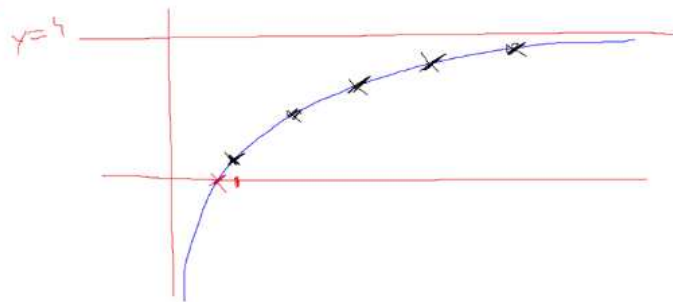
1) $u_n = 4 - \frac{3}{n}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$

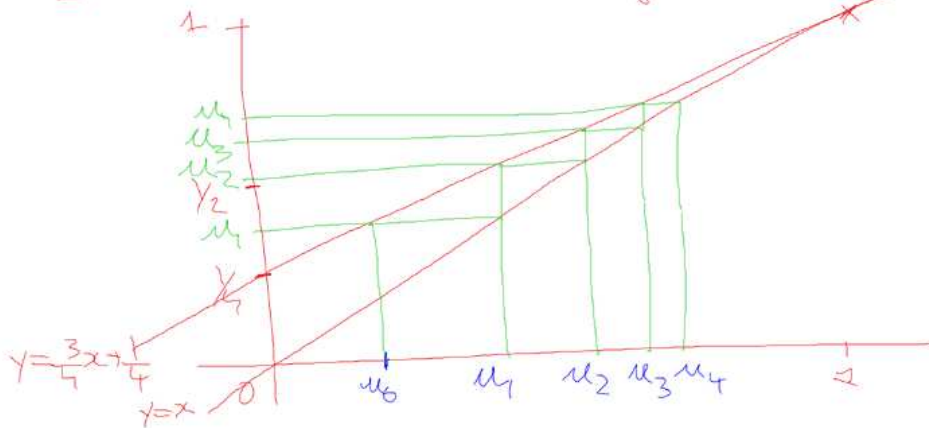
$f'(x) = \frac{3}{x^2} > 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

On obtient la courbe suivante :

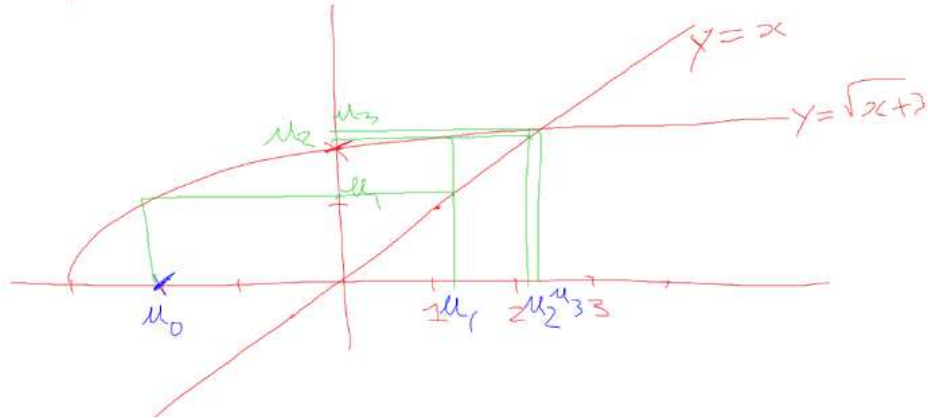


3) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$



$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \quad \text{par } n \geq 0 \end{cases}$$

On trace la courbe de la fonction f définie
par $f(x) = \sqrt{x+3}$



Exemple 5

1) $u_n = 3 - n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. La suite (u_n) n'est pas minorée.

Comme $n \geq 0$, alors $3 - n \leq 3$

La suite (u_n) est majorée par 3.

3) $u_n = \frac{\sin n}{n}$

On sait que: $-1 \leq \sin n \leq 1$

donc comme $n > 0$, on a: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Comme $n \geq 1$, alors $\frac{1}{n} \leq 1$

et $-\frac{1}{n} \geq -1$

D'où $-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$

La suite (u_n) est bornée par -1 et 1.

5) $u_n = 2n^2 + 5n + 2$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \geq 2$

La suite (u_n) est minorée par 2.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 5n + 2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

La suite (u_n) n'est pas majorée.

$$7] \quad u_n = \frac{n^2 + 5n + 15}{n^2 + 2}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 5n + 15 \geq 0$
de même $n^2 + 2 \geq 0$.

Donc $u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est minorée par 0.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 15}{x^2 + 2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+5)(x^2+2) - (x^2+5x+15)(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x + 5x^2 + 10 - 2x^3 - 10x^2 - 30x}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-5x^2 - 26x + 10}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

Le discriminant de $-5x^2 - 26x + 10$ est

$$\Delta = 676 + 20 \times 10 = 876 = 4 \times 219$$

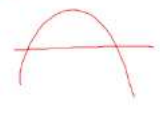
Ainsi $-5x^2 - 26x + 10$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{26 + 2\sqrt{219}}{-10} < 0$$

$$x_2 = \frac{26 - 2\sqrt{219}}{-10} \simeq 0,4 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

Donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	x_2	$+\infty$
$-5x^2 - 26x + 10$	+	0	-
$(x^2 + 2)^2$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			



$$\text{Or } u_0 = \frac{15}{2} \text{ et } u_1 = \frac{21}{3} = 7.$$

Donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{15}{2}$.

$$9) \left| \begin{array}{l} u_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \quad = n^2 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

On a: $u_n \geq 0$ pour tout n .

La suite (u_n) est minorée par 0.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ impair}}} u_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ impair}}} n^2 = +\infty.$$

La suite (u_n) n'est pas majorée.