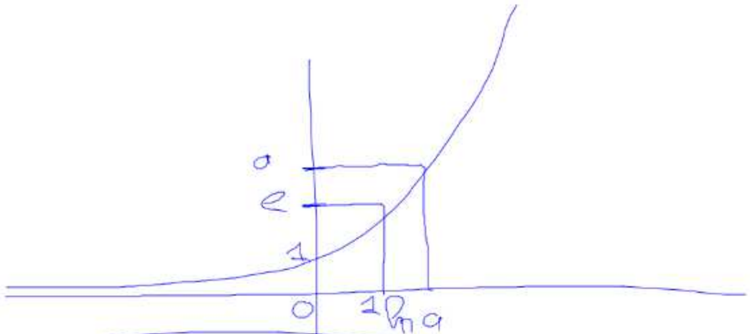
Fonction logarithme



$$e^x = a \iff x = \ln a \quad \text{pour } a > 0$$

$$e^{(\ln x)} = x \quad \text{pour } x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

$$e^0 = 1 \iff \ln 1 = 0$$

$$e^1 = e \iff \ln e = 1$$

$$\ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1$$

$$\iff x < 1$$

$$(\ln(x)) + 2 \neq \ln(x+2)$$

Exemple 1

1] Soit (E_1) l'équation : $\ln(4-2x)=0$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_1)

$$x \in D_f \iff 4-2x>0$$
$$\iff 4>2x$$
$$\iff x<2$$

D'où $D_f =]-\infty ; 2[$

$$(E_1) \iff 4-2x=1$$
$$\iff 2x=3$$
$$\iff x=\frac{3}{2}.$$

Or $\frac{3}{2}$ appartient à D_f.

l'ensemble des solutions de (E_1) est $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3) Soit (E_3) l'équation : $(2+x)\ln(x-3)=0$.

L'ensemble de définition de (E_3) est $D_f =]3;+\infty[$

$$(E_3) \iff 2+x=0 \text{ ou } \ln(x-3)=0$$
$$\iff x=-2 \text{ ou } x-3=1$$
$$\iff x=-2 \text{ ou } x=4$$

or -2 n'appartient pas à D_f et 4 y appartient.

L'ensemble des solutions de (E_3) est $S=\{4\}$.

5) Soit (E_5) l'équation : $\ln(x^2-1)=\ln(3x-3)$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_5)

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x^2-1>0 \\ 3x-3>0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2>1 \\ 3x>3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x<-1 \text{ ou } x>1 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\iff x>1$$

Donc $D_f =]1;+\infty[$

$$(E_5) \iff x^2-1=3x-3$$
$$\iff x^2-3x+2=0$$
$$\iff (x-1)(x-2)=0$$
$$\iff x=1 \text{ ou } x=2$$

Or 1 n'appartient pas à D_f et 2 y appartient.

L'ensemble des solutions de (E_5) est

$S=\{2\}$.

7] Soit (E_7) l'équation : $\ln(x^2-2x+2)=1$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_7).

$x \in D_f \iff x^2-2x+2>0$

Le discriminant de x^2-2x+2 est $\Delta = 4-4\times 2 < 0$

La parabole est tournée vers le haut.

Donc $D_f = \mathbb{R}$.

$(E_7) \iff x^2-2x+2=e$

$\iff x^2-2x+2-e=0$

Le discriminant de $x^2-2x+2-e$ est :

$$\Delta = 4-4\times(2-e) = -4+4e$$
$$= 4(e-1) > 0$$

Donc $(E_7) \iff x = \dfrac{2+\sqrt{4(e-1)}}{2}$ ou $x = \dfrac{2-\sqrt{4(e-1)}}{2}$

$\iff x = 1+\sqrt{e-1}$ ou $x = 1-\sqrt{e-1}$

Ces 2 valeurs appartiennent à D_f.

L'ensemble des solutions de (E_7) est :

$$S=\left\{1+\sqrt{e-1}\,;\,1-\sqrt{e-1}\right\}$$

9] Soit (I_9) l'inéquation : $\ln x \geq 2$.

L'ensemble de définition de (I_9) est $D_f =]0;+\infty[$

$(I_9) \iff \ln x \geq \ln e^2$

$\iff x \geq e^2$

$\iff x \in [e^2;+\infty[$

Toutes ces valeurs appartiennent à D_f, l'ensemble des solutions de (I_9) est $S=[e^2;+\infty[$.

11] Soit (I_{11}) l'inéquation : $\ln x < -3$

L'ensemble de définition de (I_{11}) est $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

$(I_{11}) \iff \ln x < \ln(e^{-3})$

$\iff x < e^{-3}$

Seules les valeurs de $]0; e^{-3}[$ appartiennent à D_f

L'ensemble des solutions de (I_{11})

est $S =]0; e^{-3}[$.

13] Soit (I_{13}) l'inéquation : $(3+x)(\ln x + 2) \geq 0$

L'ensemble de définition de (I_{13}) est $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

On étudie le signe de $\ln x + 2$.

$\ln x + 2 > 0 \iff \ln x > -2$

$\iff \ln x > \ln e^{-2}$

$\iff x > e^{-2}$

$\ln x + 2 = 0 \iff \ln x = -2$

$\iff x = e^{-2}$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$x+3$		$+$		$+$	
$\ln x + 2$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(\ln x + 2)$		$-$	0	$+$	

donc $(I_{13}) \iff x \in [e^{-2}; +\infty[$

Toutes ces valeurs appartiennent à D_f, l'ensemble des solutions de (I_{13}) est : $S = [e^{-2}; +\infty[$.

Exemple 2

1) $f_1(x) = x\ln x$

l'ensemble de définition de f_1 est $D_f =]0; +\infty[$

$f'_1(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$

3) $f_3(x) = \sqrt{\ln x}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_3

$x \in D_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \iff x \geq 1.$

Donc $D_f = [1; +\infty[$

$f'_3(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}$ $\qquad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$= \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

5) $f_5(x) = (\ln x)^2$

l'ensemble de définition de f_5 est $D_f =]0; +\infty[$

$f'_5(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$ $\qquad (u^2)' = 2uu'$

7) $f_7(x) = \ln \dfrac{2x+1}{4x-5}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_7.

$x \in D_f \iff \dfrac{2x+1}{4x-5} > 0.$

On dresse le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$-1/2$		$5/4$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{4x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble de définition de f_7 est $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{4}; +\infty[$

$$f_7'(x) = \frac{\left(\frac{2x+1}{4x-5}\right)'}{\frac{2x+1}{4x-5}} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{\frac{2(4x-5)-(2x+1)4}{(4x-5)^2}}{\frac{2x+1}{4x-5}}$$

$$= \frac{\frac{8x-10-8x-4}{(4x-5)^2}}{\frac{2x+1}{4x-5}} = \frac{\frac{-14}{(4x-5)^2}}{\frac{2x+1}{4x-5}}$$

$$= \frac{-14}{(4x-5)^2} \times \frac{4x-5}{2x+1} = \frac{-14}{(4x-5)(2x+1)}$$

9) $f_9(x) = \ln(6x^2 - x - 2)$.

Soit D_f l'ensemble de définition de f_9

$x \in D_f \iff 6x^2 - x - 2 > 0$

Le discriminant de $6x^2 - x - 2$ est $\Delta = 1 - 4 \times 6 \times (-2) = 49 = 7^2$

Donc $6x^2 - x - 2$ a deux racines : $x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

La parabole est de type

$x \in D_f \iff x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$

Donc $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$

$$f_9'(x) = \frac{12x-1}{6x^2-x-2}.$$

11) $f_{11}(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)^2$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_{11}

$x \in D_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Donc $D_f =]0; +\infty[\setminus \{1\}$.

$(u^2)' = 2uu'$

$f_{11}'(x) = 2 \cdot \frac{x}{\ln x} \times \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$= \frac{2x}{\ln x} \times \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$= \frac{2x(\ln x - 1)}{(\ln x)^3}$

13) $f_{13}(x) = e^{x \ln x}$

L'ensemble de définition de f_{13} est $D_f =]0; +\infty[$

$(e^u)' = u'e^u$

$f_{13}'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x}$

$= (\ln x + 1) e^{x \ln x}$.

15) $f_{15}(x) = \ln(\ln(x))$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_{15}.

$x \in D_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \iff x > 1$

Donc $D_f =]1; +\infty[$

$f_{15}'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

Exemple 3

1) a) $A = \frac{1}{2}\ln 16 = \frac{1}{2}\ln(2^4)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \ln 2 = 2\ln 2$

b) $B = -\ln\frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3$

c) $C = \ln 36 - 2\ln 3$

$= \ln 6^2 - 2\ln 3$

$= 2\ln 6 - 2\ln 3$

$= 2(\ln 3 + \ln 2) - 2\ln 3$

$= 2\ln 2$

d) $D = 2\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2(\ln\sqrt{2} - \ln\sqrt{3})$

$= 2(\ln(2^{1/2}) - \ln(3^{1/2}))$

$= 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3\right)$

$= \ln 2 - \ln 3$

3) $A = 2\ln(2+\sqrt{5}) + \ln(9-4\sqrt{5})$ $\quad 2\ln a = \ln(a^2)$

$= \ln((2+\sqrt{5})^2) + \ln(9-4\sqrt{5})$

$= \ln(9+4\sqrt{5}) + \ln(9-4\sqrt{5})$

$= \ln((9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5}))$

$= \ln(81-80)$

$= \ln 1$

$= 0$

$B = \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9}$

$= \ln\left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}\right)$

$= \ln\frac{1}{9} = -\ln 9 = -2\ln 3$