Exemple 8

1) Soit (E_1) l'équation : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos x=0$

$(E_1) \iff \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\cos x$ $\quad \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$

$\iff \cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)=\cos x$

$\iff \begin{cases} \frac{3\pi}{4}-2x=x+k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{3\pi}{4}-2x=-x+k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$

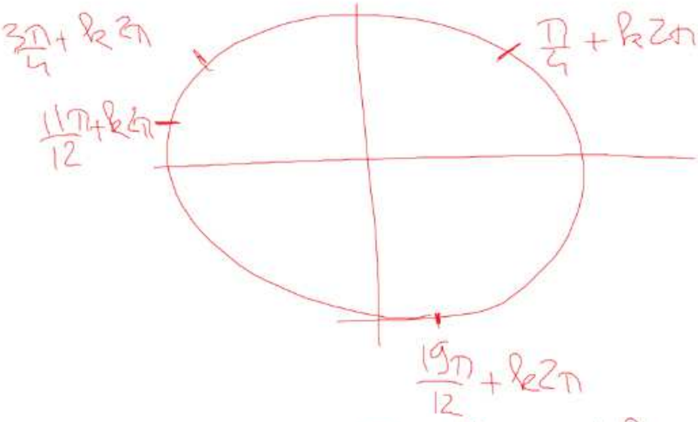
$\iff \begin{cases} -3x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ \text{ou} \\ -x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - k\frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

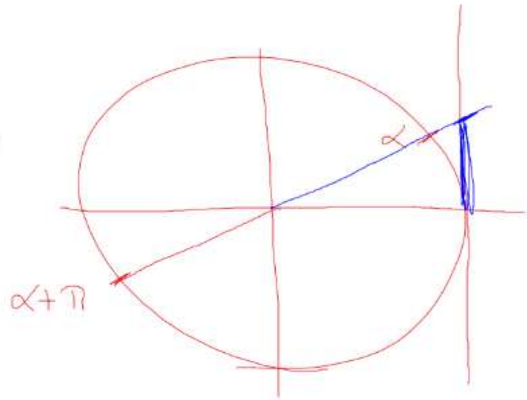
$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \; ; \; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$



2) Dans $[-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{12} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{11\pi}{12} \right\}$$

Propriété 12



$$\tan x = \tan\alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ x = \alpha + \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff x = \alpha + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Exemple 9

1) Soit (E_1) l'équation : $\tan(2x) - \tan x = 0$

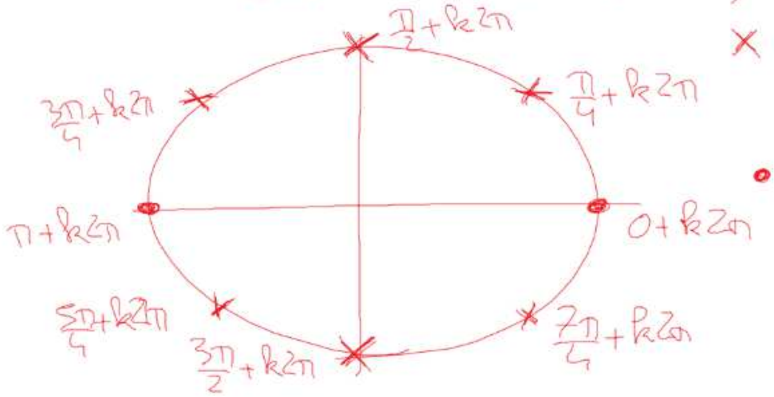
Soit D_f l'ensemble de définition de (E_1).

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{et} \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{et} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$(E_1) \iff \tan(2x) = \tan x$$
$$\iff 2x = x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



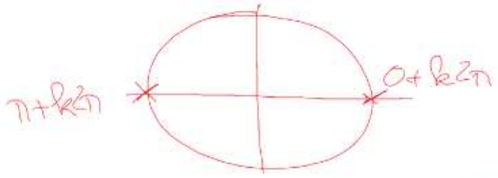
× valeur n'appartenant pas à D_f

• valeur possible

Toutes les valeurs $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ appartiennent à D_f, donc l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \{ k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$$

2) Dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions
est $S = \{ k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$



Dans $[-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions
est $S = \{ -\pi ; 0 ; \pi \}$

2 bis)
Dans $[0 ; 2\pi]$, l'ensemble des solutions
est $S = \{ 0 ; \pi ; 2\pi \}$

2 bis)
Dans $[0 ; 2\pi]$, l'ensemble des solutions
est $S = \{ 0 ; \pi ; 2\pi \}$

3) Soit (E_3) l'équation : $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_3).

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{3} - 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -2x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

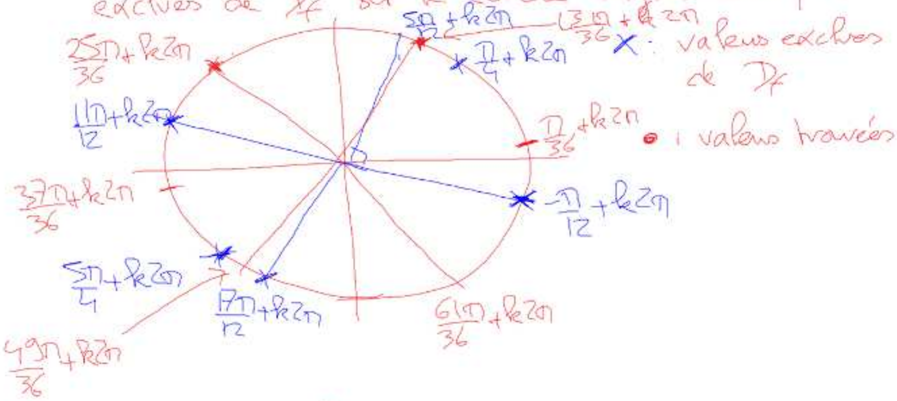
Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$(E_3) \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On représente ces valeurs ainsi que les valeurs exclues de D_f sur le cercle trigonométrique.



Toutes les valeurs trouvées appartiennent à D_f.

L'ensemble des solutions de (E_3) est :

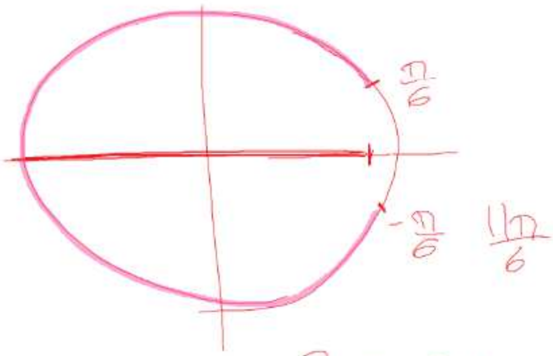
$$S = \left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4) Dans $[0 ; 2\pi]$ l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{\pi}{36} ; \frac{13\pi}{36} ; \frac{25\pi}{36} ; \frac{37\pi}{36} ; \frac{49\pi}{36} ; \frac{61\pi}{36} \right\}$

4bis) Dans $[-\pi ; \pi]$ l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{\pi}{36} ; \frac{13\pi}{36} ; \frac{25\pi}{36} ; -\frac{35\pi}{36} ; -\frac{23\pi}{36} ; -\frac{11\pi}{36} \right\}$

Exemple 10

1] Soit (I_1) l'inéquation : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



$(I_1) \iff x \in \left]\frac{\pi}{6} + k2\pi ; \frac{11\pi}{6} + k2\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

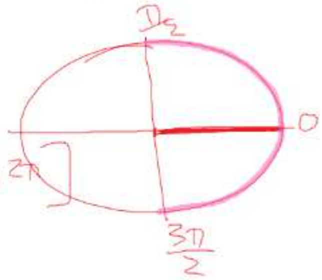
l'ensemble des solutions de (I_1) est la réunion des intervalles de la forme $\left]\frac{\pi}{6} + k2\pi ; \frac{11\pi}{6} + k2\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3] Soit (I_3) l'inéquation $\cos x(2\sin x+1) \geq 0$.

On étudie le signe de chaque facteur : $\cos x$ et $2\sin x+1$.

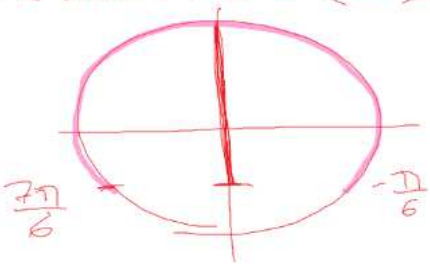
Ainsi • $\cos x > 0$

$\iff x \in [0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$



• $\cos x = 0$
$\iff x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

• $2\sin x + 1 > 0 \iff \sin x > -\frac{1}{2}$



$\iff x \in [0; \frac{7\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}; 2\pi]$

• $2\sin x + 1 = 0 \iff x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

On dresse le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\cos x$		+	0	−		−	0	+		+	
$2\sin x + 1$		+		+	0	−		−	0	+	
$\cos x(2\sin x+1)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de (I_3) est :

$$S = [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{11\pi}{6}; 2\pi]$$