Exercice supplémentaire de mécanique :
L'enfant sur la balançoire

On étudie le mouvement d'un enfant sur une balançoire, le tout assimilé à un point M coïncidant avec l'assise de la balancelle. On attribue à l'ensemble la masse m = 20 kg. La cordelette permettant d'accrocher le siège au portique a pour longueur $\ell = 2{,}0$ m et est considérée comme « rigide » et non déformable. On étudie le mouvement dans le repère attaché au portique et l'origine de ce repère est le point O, point d'attache de la corde sur le portique situé à une altitude h = 2,4 m. A la date t = 0, l'enfant est tiré en arrière de manière à ce que la cordelette forme un angle $\theta_0 = -20°$ avec la verticale, puis est lâché sans donner davantage d'élan. On cherche à estimer la vitesse maximale atteinte par l'enfant sur sa trajectoire. On néglige l'ensemble des frottements (fluides sur l'enfant ou de liaison au niveau de l'attache de la cordelette)

1) Schématiser la situation de balancer avec un angle $\theta > 0$. Y faire figurer les différentes forces appliquées au système, ainsi que les vecteurs de la base polaire.
2) A quel endroit de la trajectoire la vitesse sera-t-elle la plus grande ?

3) Etude énergétique :

a) Quelle est la valeur de l'énergie cinétique initiale E_{c0} ?
b) En prenant comme origine des énergies le point le plus bas de la trajectoire, déterminer l'énergie potentielle initiale E_{p0}. Calculer sa valeur.
c) Exprimer l'énergie cinétique maximale E_{cmax}. On notera v_{max} la vitesse maximale inconnue.
d) Que vaut l'énergie potentielle E_p lorsque l'énergie cinétique est maximale ?
e) En l'absence de frottements l'énergie mécanique reste constante tout-au long du mouvement. En déduire la valeur de la vitesse maximale atteinte.

4) Etude complète du mouvement :

a) Donner l'expression du vecteur accélération du système dans la base polaire.
b) Par projection de la 2^e loi de Newton selon les vecteurs de la base polaire, déterminer les équations différentielles du mouvement satisfaites par l'angle $\theta(t)$.
c) Par approximation des petits angles, déterminer la pulsation propre des oscillations harmoniques.
d) Déterminer grâce aux conditions initiales l'expression des la solution $\theta(t)$.
e) En déduire l'expression de la vitesse $v(t) = R.\dot{\theta}(t)$. Quelle est la valeur de la vitesse maximale ?