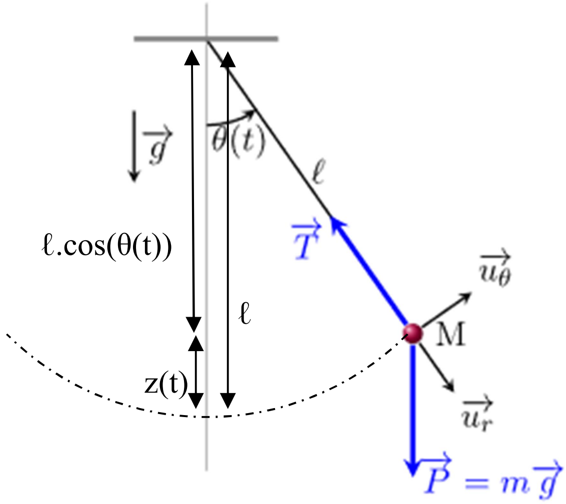
Exercice supplémentaire de mécanique :
L'enfant sur la balançoire
CORRIGE

1) Schéma :



1) En l'absence de frottements, l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$ reste constante. Pour que l'énergie cinétique soit la plus grande possible (donc la vitesse la plus grande possible), il faut que l'énergie potentielle de pesanteur soir la plus faible possible, donc au point le plus bas de la trajectoire, quand $\theta = 0$.

2) Etude énergétique :

a) $E_{c0} = ½\ m.0^2 = 0$ (pas d'élan supplémentaire initial)

b) $E_{p0} = mgz_0$ avec z_0 altitude initiale par rapport au point le plus bas de la trajectoire
D'après le schéma ci-dessus, $z_0 = \ell - \ell\cos(\theta_0)$
Donc $E_{p0} = mg\ell(1-\cos(\theta_0)) = 23{,}7$ J

c) $E_{cmax} = ½\ m.v_{max}^2$

d) $E_p = 0$ lorsque l'énergie cinétique est maximale car on est au point le plus bas de la trajectoire

e) $E_m = E_{p0} + E_{c0} = E_{cmax} + 0$ donc $E_{cmax} = 23{,}7$ J $= ½\ m.v_{max}^2$ donc $v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{cmax}}{m}} = 2{,}4\ m.s^{-1} = 8{,}5$ km.h^{-1}

3) Etude complète du mouvement :

a) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = \ell\overrightarrow{u_r}$ donc par dérivation $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \ell\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$
donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ell\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right) = \ell\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$

b) 2^e loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$
Projection sur $\overrightarrow{u_r}$: $-m\ell\dot{\theta}^2 = mg.\cos(\theta) - T$
Projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$: $m\ell\ddot{\theta} = -mg.\sin(\theta) + 0$

c) Par approximation des petits angles, $m\ell\ddot{\theta} = -mg.\sin(\theta) \approx -mg\theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ donc $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$ donc la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ = 2,2 rad.s^{-1}

d) Equation caractéristique (C) : $x^2 + \frac{g}{\ell} = 0$ donc racines $\pm j\omega_0$ donc la solution est du type :
$\theta(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)$

On détermine A et B grâce aux conditions initiales :
A t = 0, $\theta(t=0) = \theta_0 = A$
$\dot{\theta}(t = 0) = 0$ (vitesse initiale nulle)
Or $\dot{\theta}(t) = -\omega_0 A.\sin(\omega_0 t) + \omega_0.B.\cos(\omega_0 t)$
Donc $0 = \omega_0.B$ donc B = 0
Donc $\theta(t) = \theta_0.\cos(\omega_0.t)$

e) Vitesse $v(t) = \ell.\dot{\theta}(t) = -\ell\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$
La vitesse |v(t)| est maximale quand $\sin(\omega_0 t) = \pm 1$ donc $v_{max} = |\ell\theta_0\omega_0|$

Attention pour l'application numérique il faut θ_0 en radian : $\theta_0 = -20° = -20.\frac{\pi}{180}$ =0,35 rad
Donc v_{max} = 1,5 m.s^{-1} = 5,6 km.h^{-1}, assez différent du résultat grands angles donc l'approximation des petits angles n'est pas appropriée.