

TD n° 11 : la fonction exponentielle

Exercice 1

$$A = e^{3x} e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$$

$$B = e^{x+1-(x+2)} = e^{-1-2} = e^{-3}$$

$$C = (e^x + e^{-x}) e^{-x} = e^0 + e^{-2x} = 1 + e^{-2x}$$

$$D = e^{-2x+2}$$

$$E = (e^{3x} + 2e^{2x}) e^{-2x} = e^{3x-2x} + 2e^{2x-2x} = e^x + 2e^0 = e^x + 2$$

$$F = e^{4x+1-(-3x-1)} = e^{4x+1+3x+1} = e^{7x+2}$$

$$G = \frac{e^{3x}}{e^{-2x} e^x} = \frac{e^{3x}}{e^{-2x+x}} = \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{3x} \cdot e^x = e^{4x}$$

$$H = \frac{e^{x+y}}{e^{x-y}} = e^{x+y-(x-y)} = e^{2y}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1) (g(x))^2 - (h(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{4e^0}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$2) g(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

$$\begin{aligned} 2(g(x))^2 - 1 &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - 1 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - 2}{2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } g(2x) = 2(g(x))^2 - 1$$

$$h(z) = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2}$$

$$\begin{aligned} 2h(z)g(z) &= 2 \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} + e^0 - e^0 - e^{-2z}}{2} \\ &= \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } h(2z) = 2h(z)g(z).$$

Exercice 3

$$1) \quad \frac{4e^z}{e^z + 1} - 1 = \frac{4e^z - (e^z + 1)}{e^z + 1} = \frac{3e^z - 1}{e^z + 1}$$

$$\text{Donc } f(z) = \frac{4e^z}{e^z + 1} - 1$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(z) + f(-z) &= \frac{3e^z - 1}{e^z + 1} + \frac{3e^{-z} - 1}{e^{-z} + 1} \\ &= \frac{(3e^z - 1)(e^{-z} + 1) + (e^z + 1)(3e^{-z} - 1)}{(e^z + 1)(e^{-z} + 1)} \\ &= \frac{3e^0 + 3e^z + e^{-z} + 1 + 3e^0 + e^z + 3e^{-z} - 1}{e^0 + e^z + e^{-z} + 1} \\ &= \frac{3 + 3e^z + e^z + 1 + 3 + e^z + 3e^{-z} - 1}{e^z + e^z + 2} \\ &= \frac{4 + 4e^z + 2e^{-z}}{2 + e^z + e^{-z}} \\ &= 2 \frac{2 + e^z + e^{-z}}{2 + e^z + e^{-z}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(z) + f(-z) = 2$$

$$\begin{aligned} 3) \quad g(z) + g(-z) &= \frac{e^z - 1}{e^z + 1} + \frac{e^{-z} - 1}{e^{-z} + 1} = \frac{(e^z - 1)(e^{-z} + 1) + (e^z + 1)(e^{-z} - 1)}{(e^z + 1)(e^{-z} + 1)} \\ &= \frac{e^0 + e^z - e^{-z} - 1 + e^0 - e^z + e^{-z} - 1}{(e^z + 1)(e^{-z} + 1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } g(z) + g(-z) = 0$$

Exercice 4

1) $(E_1) \Leftrightarrow e^{3-x} = e^0$

$$\Leftrightarrow 3-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S = \{3\}$

2) $(E_2) \Leftrightarrow e^{2x^2+3} = e^{7x}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3 = 7x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Le discriminant de $2x^2 - 7x + 3$ est $\Delta = 49 - 24 = 25 = 5^2$

Donc $(E_2) \Leftrightarrow x = \frac{7+5}{4}$ ou $x = \frac{7-5}{4}$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est : $S = \{\frac{1}{2}; 3\}$

3) $(E_3) : 2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$

Soit D l'ensemble de définition de (E_3) .

$$x \in D \Leftrightarrow e^x + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq -2 \text{ ce qui est toujours vrai car } e^x > 0.$$

D'où $D = \mathbb{R}$.

$$(E_3) \Leftrightarrow 2e^{-x}(e^x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^0 + 4e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4e^{-x} = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{1}{4}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

L'ensemble des solutions de (E_3) est : $S = \emptyset$

4] $(E_4) \Leftrightarrow x^3 = 8$

$\Leftrightarrow x = 2$ car la fonction cube est strictement croissante

L'ensemble des solutions de (E_4) est: $S = \{2\}$.

5] L'ensemble de définition de (E_5) est $D_f = \mathbb{R}^*$

$(E_5) \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

Le discriminant de $x^2 + x - 1$ est $\Delta = 1 + 4 = 5$

Donc $(E_5) \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Ces 2 valeurs appartiennent à D_f .

L'ensemble des solutions de (E_5) est $S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

6] L'ensemble de définition de (E_6) est $D_f = \mathbb{R}^+$

$(E_6) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$

$\Leftrightarrow x = 9$

Or 9 appartient à D_f .

L'ensemble des solutions de (E_6) est $S = \{9\}$.

7] $(E_7) \Leftrightarrow e^{x^2} = e^6 e^{-x}$

$\Leftrightarrow e^{x^2} = e^{6-x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 6 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$.

Le discriminant de (E_7) est $\Delta = 1 + 24 = 5^2$

D'où $(E_7) \Leftrightarrow x = \frac{-1+5}{2}$ ou $x = \frac{-1-5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -3$

L'ensemble des solutions de (E_7) est: $S = \{-3, 2\}$

$$8) (E_8) \Leftrightarrow x^2 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

Le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $\Delta = 1 - 8 = -7$.

L'ensemble des solutions de (E_8) est: $S = \emptyset$

Exercice 5

$$1) (I_1) \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq -2$$

L'ensemble des solutions de (I_1) est $S = \emptyset$

$$2) (I_2) \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^{x+6}$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

L'ensemble des solutions de (I_2) est: $S =]-\infty; 3]$

3) L'ensemble de définition de (I_3) est $D_f = \mathbb{R}$ car e^x est non nul par tout $x \in \mathbb{R}$.

$$(I_3) \Leftrightarrow e^x \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -x$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0$$

L'ensemble des solutions de (I_3) est: $S =]-\infty; 0]$

$$4) (I_4) \Leftrightarrow (e^x - 1)e^x - (e^x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

L'ensemble des solutions de (I_4) est: $S = \mathbb{R}^*$

$$5) (I_5) \Leftrightarrow 2x < x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble des solutions de (I_5) est: $S =]-\infty; 0[$

$$6) \text{ On pose } X = e^x$$

$$(I_6) \Leftrightarrow 3X^2 + X - 4 < 0$$

Le discriminant de $3X^2 + X - 4$ est $\Delta = 1 + 48 = 49$

Ainsi $3X^2 + X - 4$ a deux racines: $X_1 = \frac{-1+7}{6} = 1$

et $X_2 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3}$

La parabole est du type 

$$\text{Donc } (I_6) \Leftrightarrow X \in]-\frac{4}{3}; 1[$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < X < 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow e^x < 1 \quad \text{car } e^x > -\frac{4}{3} \text{ est toujours vraie.}$$

$$\Leftrightarrow e^x < e^0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble des solutions de (I_6) est $S =]-\infty; 0[$