Chapitre 14 : La fonction logarithme népérien

1 Définitions

Définition 1 : fonction ln

La fonction exponentielle est une fonction de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$ vérifiant : quel que soit le réel a strictement positif, l'équation $e^x = a$ admet une seule solution.
Cette solution est notée $\ln a$.
On définit donc une fonction que l'on appelle fonction logarithme népérien et que l'on note ln vérifiant :
pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Propriété 1 : variations de la fonction ln

1. La fonction ln est définie et continue sur $]0;+\infty[$
2. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
3. Si $u(x) > 0$ est dérivable sur un intervalle I alors $\ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\ln(u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
4. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Remarques :
- On a donc pour a et b strictement positifs : $a = b$ si et seulement si $\ln a = \ln b$
- En particulier, on a : $\ln x = 0 \iff x = 1$ et $\ln x = 1 \iff x = e$.
- On a pour a et b strictement positifs : $a < b \iff \ln a < \ln b$
- En particulier, on a pour x strictement positif : $\ln x < 0 \iff x < 1$

Exemple 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $\ln(4-2x) = 0$
2. $\ln(3x-1) = 0$
3. $(2+x)\ln(x-3) = 0$
4. $(2x-3)\ln(1-x) = 0$
5. $\ln(x^2-1) = \ln(3x-3)$
6. $\ln(x+3) = \ln(2-x)$
7. $\ln\left(x^2-2x+2\right) = 1$
8. $\ln\left(2x^2-5x+1\right) = 1$
9. $\ln(x) \geqslant 2$
10. $\ln(x) \leqslant -1$
11. $\ln(x) < -3$
12. $(x-5)(\ln(x)+1) < 0$
13. $(3+x)(\ln(x)+2) \geqslant 0$

Exemple 2
Après avoir déterminé l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée.

1. $f_1(x) = x\ln x$
2. $f_2(x) = x^2\ln x$
3. $f_3(x) = \sqrt{\ln x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
5. $f_5(x) = (\ln x)^2$
6. $f_6(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$
7. $f_7() = \ln\dfrac{2x+1}{4x-5}$
8. $f_8(x) = \ln\dfrac{4x+1}{2x-3}$
9. $f_9(x) = \ln(6x^2 - x - 2)$
10. $f_{10}(x) = \ln(x^2 + x - 12)$
11. $f_{11}(x) = \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^2$
12. $f_{12}(x) = (x\ln x)^2$
13. $f_{13}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$
14. $f_{14}(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{x}}$
15. $f_{15}(x) = \ln(\ln x)$

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : propriétés algébriques de la fonction ln

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier naturel, on a

1. $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(a^n) = n\ln a$
5. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(a^{-n}) = -n\ln a$

Exemple 3

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :
   a. $A = \dfrac{1}{2}\ln 16$
   b. $B = -\ln\dfrac{1}{3}$
   c. $C = \ln 36 - 2\ln 3$
   d. $D = 2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$ les nombres suivants :
   a. $A = \ln(10\mathrm{e})$
   b. $B = \dfrac{1}{\ln(25)}$
   c. $C = \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$
   d. $D = \dfrac{\ln\left(2\sqrt{5}\right)}{\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)}$
3. Simplifier les deux expressions suivantes :
   a. $A = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \ln\left(9 - 4\sqrt{5}\right)$
   b. $B = \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{3}{5} + \ln\dfrac{5}{7} + \ln\dfrac{7}{9}$

3 Limites et croissances comparées

Propriété 3 : limites de la fonction ln

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

Propriété 4 : croissances comparées

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

Propriété 5 : une limite en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 4

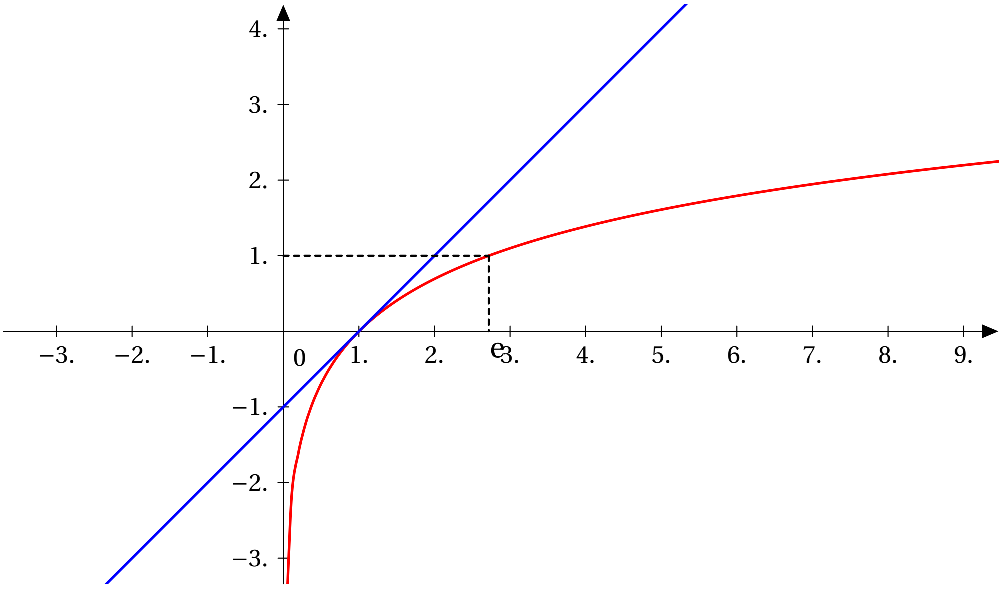
1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en 0^+ des fonctions suivantes :

   a. $f_1(x) = x^2 + \ln x$
   b. $f_2(x) = -3x - \ln x$
   c. $f_3(x) = (x^2+1)\ln x$
   d. $f_4(x) = \left(-x^2 - x - 1\right)\ln x$
   e. $f_5(x) = \dfrac{5x^3 \ln x}{1 + 4\ln x}$
   f. $f_6(x) = \dfrac{3\ln x}{x^4 + 5}$

2. Même question avec les fonctions suivantes :

   a. $f_1(x) = x + \ln x$
   b. $f_2(x) = -x^2 - \ln x$
   c. $f_3(x) = (4x^2 - 1)\ln x$
   d. $f_4(x) = \left(2x^2 - x + 3\right)\ln x$
   e. $f_5(x) = \dfrac{7x^2 \ln x}{3 - 5\ln x}$
   f. $f_6(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$

4 Tableau de variations et représentation graphique



x	0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exemple 5

1. On pose $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.
   - **a.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction g
   - **b.** Calculer $g'(x)$.
   - **c.** Déterminer les limites de g en 0^+, en $+\infty$, en 1^- et 1^+.
   - **d.** Dresser le tableau de variations de g et tracer sa courbe représentative.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \ln x - x + 1$.
   - **a.** Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
   - **b.** Déterminer le tableau de variation de f.
   - **c.** En déduire le signe de $f(x)$.
   - **d.** Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction ln et $(\mathscr{T})$ la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
     Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{T})$.
   - **e.** Déterminer la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{T})$.
   - **f.** Tracer ces deux courbes.

3. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x+1}$.
Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x - 1$.

a. Étudier le sens de variations de g.

b. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.
Donner une valeur approchée au dixième près par défaut de α.

d. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B : Étude de f

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que f' a le même signe que g sur $]0, +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f. On montrera que $f(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$.

d. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à (Γ) au point d'abscisse 1.

e. Tracer $(\mathscr{T})$ et (Γ).