Chapitre 13 : Suites (1)

1 Définitions

Définition 1 : premières définitions

1. Une suite est une fonction particulière pour laquelle la variable ne peut prendre que des valeurs entières positives $(0, 1, 2, ...)$.
2. La fonction est souvent notée u ; la variable est notée n (avec $n \in \mathbb{N}$).
3. L'image de n par la suite u est notée $u(n)$ ou plus souvent u_n.
4. n est appelé rang ou indice ; u_n est le terme d'indice n.
5. La suite est notée u ou (u_n).

Propriété 1 : mode de définition d'une suite

Une suite peut être définie par :
• son terme général ou "de manière explicite" (u_n est exprimé en fonction de n)
• une relation de récurrence (une relation entre un terme et le précédent) et le premier terme
• une propriété caractéristique

Exemple 1

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
2. Même question avec $u_n = n - \dfrac{2}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
3. Déterminer les quatre premiers termes de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour $n \geqslant 0$.
4. Même question avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
5. Même question avec $u_2 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.
6. Même question avec $u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Exemple 2

1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = n(n-1)$.
   a. Exprimer $u_{n+1}, u_n + 1, u_{n-1}$ et u_{2n} en fonction de n.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = n^2 + n - 2$.
   Exprimer $u_{n+1}, u_n + 1, u_{n-1}, u_{2n}, u_{3n-1}$ et $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2^{3n+1}$.
   Exprimer en fonction de n : $v_{n+1}, v_{n-1}, v_{n+2}, v_{2n}$ et v_{2n+1}.
4. Même question avec $w_n = 3^{2n-1}$

5. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$ et $x_0 = 2$.
Exprimer en fonction de x_n : x_{n+1} et x_{n+2}.
6. Même question avec $y_n = 3y_{n-1} + 1$ et $y_0 = 1$

Définition 2 : suite croissante, décroissante, constante

Une suite (u_n) est constante si l'on a : $u_{n+1} = u_n$ pour tout n
Une suite (u_n) est croissante si l'on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n
Une suite (u_n) est décroissante si l'on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n

Remarque
Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut :
– étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
– étudier le sens de variation de la fonction f lorsque (u_n) est définie par son terme général avec $u_n = f(n)$.

Exemple 3
Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - n$

b) $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$

c) $u_n = \dfrac{3}{1-n}$ $(n \geqslant 2)$

d) $u_n = \dfrac{2}{n}$ $(n \geqslant 1)$

e) $u_n = (n+1) \times (-2)^n (n \geqslant 0)$

f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \geqslant 1)$

g) $u_n = \dfrac{2}{5^n}$ $(n \geqslant 0)$

h) $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $(n \geqslant 1)$

i) $u_n = 5n^2 + 6n - 8$ $(n \geqslant 0)$

j) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ $(n \geqslant 1)$

k) $u_n = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ $(n \geqslant 1)$

l) $u_n = 5\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $(n \geqslant 1)$

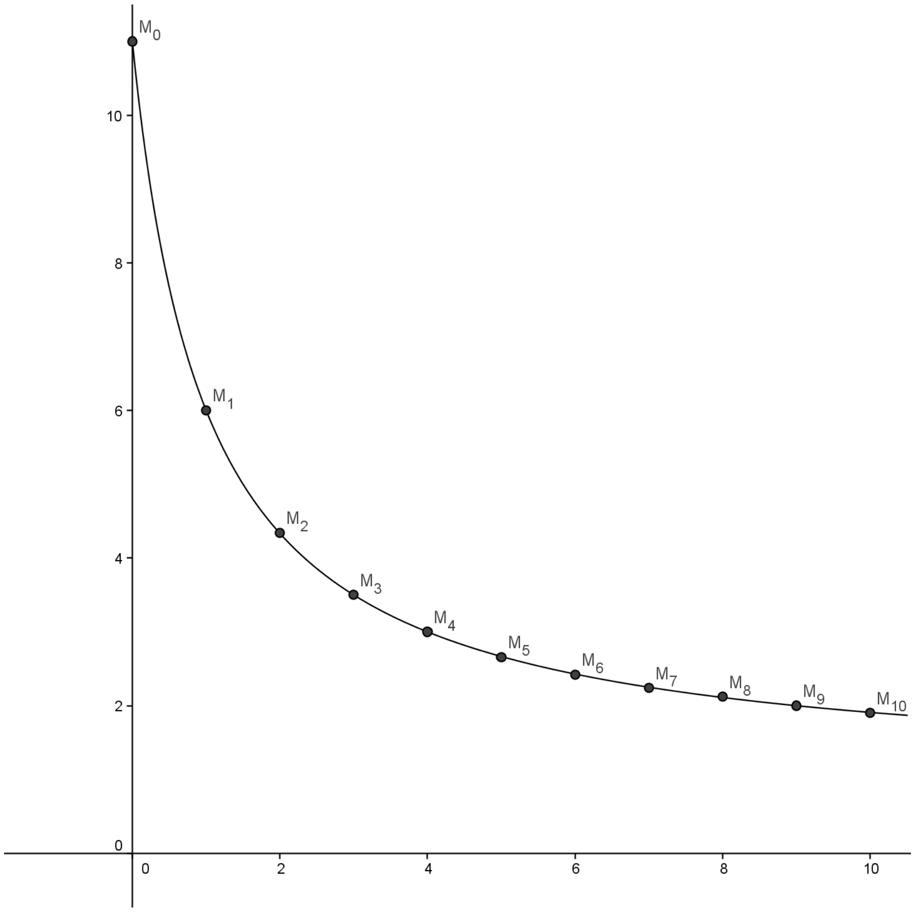
m) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ $(n \geqslant 0)$

n) $u_n = -3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

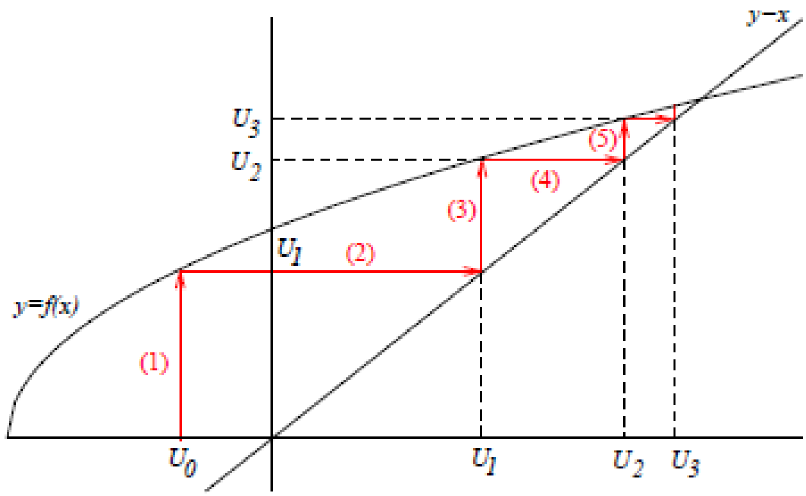
Définition 4 : représentation graphique d'une suite

La représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n).

Remarques
• Si la suite (u_n) est définie par son terme général $u_n = f(n)$, pour tracer la représentation graphique de la suite (u_n), il suffit de tracer la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et de ne sélectionner que les images des entiers.



• Si la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on ne peut pas simplement réaliser la représentation graphique de la suite mais on peut visualiser le comportement de la suite en s'aidant de la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et de la droite d'équation $y = x$.



Exemple 4

1. Représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie, pour $n > 0$, par $u_n = 4 - \dfrac{3}{n}$.
2. Même question avec $u_n = \dfrac{n^2}{4} - n + 1$.
3. Même question avec la suite définie par $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4} \text{ pour } n \geqslant 0 \end{array}\right.$

4. Même question avec la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{2}{3}u_n+5 & \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$

5. Même question avec la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+3} & \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$

Définition 4 : suite majorée, minorée, bornée

La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n \leqslant M$
La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n \geqslant m$
La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 5
Déterminer pour chaque suite si elle est majorée, minorée ou bornée :

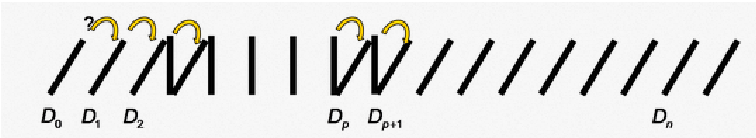
1. $u_n = 3-n$ pour $n \geqslant 0$.
2. $u_n = -5n+102$ pour $n \geqslant 0$.
3. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
4. $u_n = 8\cos(n)+7$ pour $n \geqslant 0$.
5. $u_n = 2n^2+5n+2$ pour $n \geqslant 0$.
6. $u_n = -3n^2+2n-1$ pour $n \geqslant 0$.
7. $u_n = \dfrac{n^2+5n+15}{n^2+2}$ pour $n \geqslant 0$.
8. $u_n = \dfrac{4n+3}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
9. $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n^2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

2 Raisonnement par récurrence

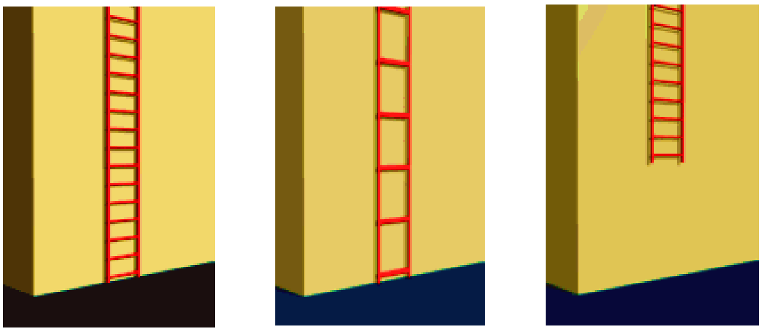
Propriété 2 : principe de récurrence

Soit $\mathscr{P}[n]$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
Cette propriété est vraie pour tout nombre entier naturel n si :
• la propriété est vraie au rang initial, c'est-à-dire pour $n=0$
(c'est la première étape : **l'initialisation**)
• la propriété est héréditaire, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}[n]$ vraie implique $\mathscr{P}[n+1]$ vraie
(c'est la deuxième étape : **l'hérédité**)

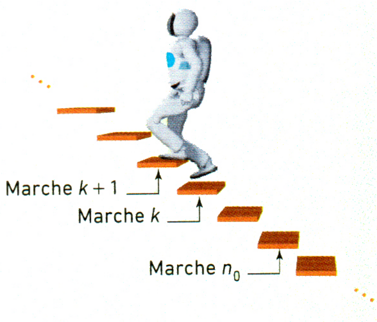
Représentation imagée : les dominos



Représentation imagée : les échelles



Représentation imagée : le robot



Remarques

• On peut aussi démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout $n \geqslant 3$ (par exemple).
La première étape sera alors : on prouve que la propriété est vraie pour $n = 3$ (c'est-à-dire au rang initial).
La deuxième étape sera : pour tout $n \geqslant 3$, $\mathscr{P}[n]$ vraie implique $\mathscr{P}[n+1]$ vraie .
• Dans la rédaction, on sera attentif à bien préciser les différentes étapes avec des conclusions intermédiaires.

Exemple 6

Démontrer par récurrence :

1. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \qquad \text{pour } n \geqslant 0 \end{array}\right.$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 13 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 8 \qquad \text{pour } n \geqslant 0 \end{array}\right.$
   Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 12 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

3. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n+8} \qquad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$
   Montrer que la suite est majorée par 4.
4. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & \frac{1}{5} \\ u_{n+1} & = & \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4} \qquad \text{pour} n \geqslant 0 \end{cases}$
   Montrer que la suite est majorée par 1.
5. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{4u_n+6}{u_n+3} \qquad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$
   Montrer que la suite est bornée par 2 et 3.
6. Montrer que $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel n non nul.
7. Montrer que $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel n non nul.

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 5 : suite arithmétique

Une suite (u_n) est une suite arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r ; ce nombre est appelé raison de la suite.
On a : $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geqslant 0$.

Remarque
Il faut savoir exprimer u_n en fonction de n (penser au nombre de termes et d'intervalles)

Exemple 7

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
   On donne : $u_5 = 7, r = 2$.
   Calculer u_1, u_{25} et u_{100}.
2. Même question avec $u_3 = 12, u_8 = 0$.
   Calculer r, u_0 et u_{18}.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 7-3n$
   Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.
4. Même question avec $u_n = 4n+2$.
5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n-4}{u_n-3}$ (pour $n \geqslant 0$).
   On introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n-2}$.
   Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, dont on déterminera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

6. Mêmes questions avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+5}$ (pour $n \geqslant 0$)et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Propriété 3 : somme des premiers entiers

Soit n un entier naturel non nul.
Alors $S = 1+2+...+n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque
On retrouve rapidement cette formule en pensant à "retourner" cette somme (méthode de « Gauss »). Cette méthode est d'ailleurs applicable à la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exemple 8

1. Calculer $S = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + ... + \dfrac{19}{3} + 7$.
2. Même question avec $S = 5+2-1-4-...-34$.

Définition 6 : suite géométrique

Une suite (u_n) est une suite géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q ; ce nombre est appelé raison de la suite.
On a : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Remarques
Il faut savoir exprimer u_n en fonction de n (penser au nombre de termes et d'intervalles)

Exemple 9

1. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.
   On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.
   Calculer u_4, u_8 et u_{20}.
2. Même question avec $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.
   Calculer u_0, u_{15} et u_{20}.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer la raison de la suite.
4. Même question avec $u_n = \dfrac{3^n}{5^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5}$ (pour $n \geqslant 0$) et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on déterminera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
6. Mêmes questions avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 9$.

Propriété 4 : somme des puissances successives d'un nombre

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1.
Alors $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Remarque
On retrouve rapidement cette formule en pensant à faire la différence entre la somme et la somme multipliée par la raison. Cette méthode est d'ailleurs applicable à la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple 10

1. Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2048$.
2. Calculer $S = 2 + 6 + 18 + ... + 118098$.
3. Même question avec $S = 3 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{25} - ... - \dfrac{3}{1953125}$.

Propriété 5 : limite de q^n

Soit n un entier naturel non nul et q un réel.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \ \text{ si } q > 1 \\ 1 \ \text{ si } q = 1 \\ 0 \ \text{ si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite } \ \text{si } q \leqslant -1 \end{cases}$

Exemple 11

1. Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers l'infini.
2. Même question avec les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 3 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 9$.
3. En 2017, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :
   - 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
   - 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

   On appelle u_n le nombre de milliers d'habitants de la ville Bellecité l'année $(2017 + n)$.

   a. Calculer u_1 et u_2 (on donnera le résultat à 1 habitant près).
   b. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n par la relation :
   $$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$
   c. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $$v_n = u_n - 12$$

i. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

ii. Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

iii. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = -2 \times (0,9)^n + 12.$$

d. Déterminer le nombre d'habitants en 2030. On donnera une valeur approchée arrondie à 1 habitant près.
(on donne : $0,9^{13} \simeq 0,254$, $0,9^{14} \simeq 0,229$ et $0,9^{15} \simeq 0,206$ à 10^{-3} près)

e. Déterminer le sens de variation de la suite.
Qu'en déduit-on pour le nombre d'habitants de la ville ?

f. A partir de quelle année, le nombre d'habitants aura-t-il dépassé 11 800 ?
(on donne : $\dfrac{\ln 10}{\ln 0,9} \simeq -21,8$ à 10^{-1} près)