Exemple 4

e) $f(x) = \dfrac{5x^3 \ln x}{1 + 4\ln x}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f.

$$x \in D_f \iff \begin{cases} 1 + 4\ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1/4} \end{cases}$$

Donc $D_f =]0 ; e^{-1/4}[\cup]e^{-1/4} ; +\infty[$

$$f(x) = \frac{5x^3 \ln x}{\ln x \left(4 + \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{5x^3}{4 + \frac{1}{\ln x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \frac{1}{\ln x} = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 5x^3 \ln x = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + 4\ln x = -\infty$

par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

f) $f(x) = \dfrac{3\ln x}{x^4 + 5}$

$$f(x) = \frac{3\ln x}{x^4\left(1 + \frac{5}{x^4}\right)} = \frac{\frac{3\ln x}{x^4}}{1 + \frac{5}{x^4}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{5}{x^4} = 1$

par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^4 + 5 = 5$

par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Exemple 5

1) a) Soit D_f l'ensemble de définition de g.

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Donc $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

b) $$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

Comme $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $g'(x) < 0$

La fonction g est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$ car ln est croissante sur $]0;+\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$

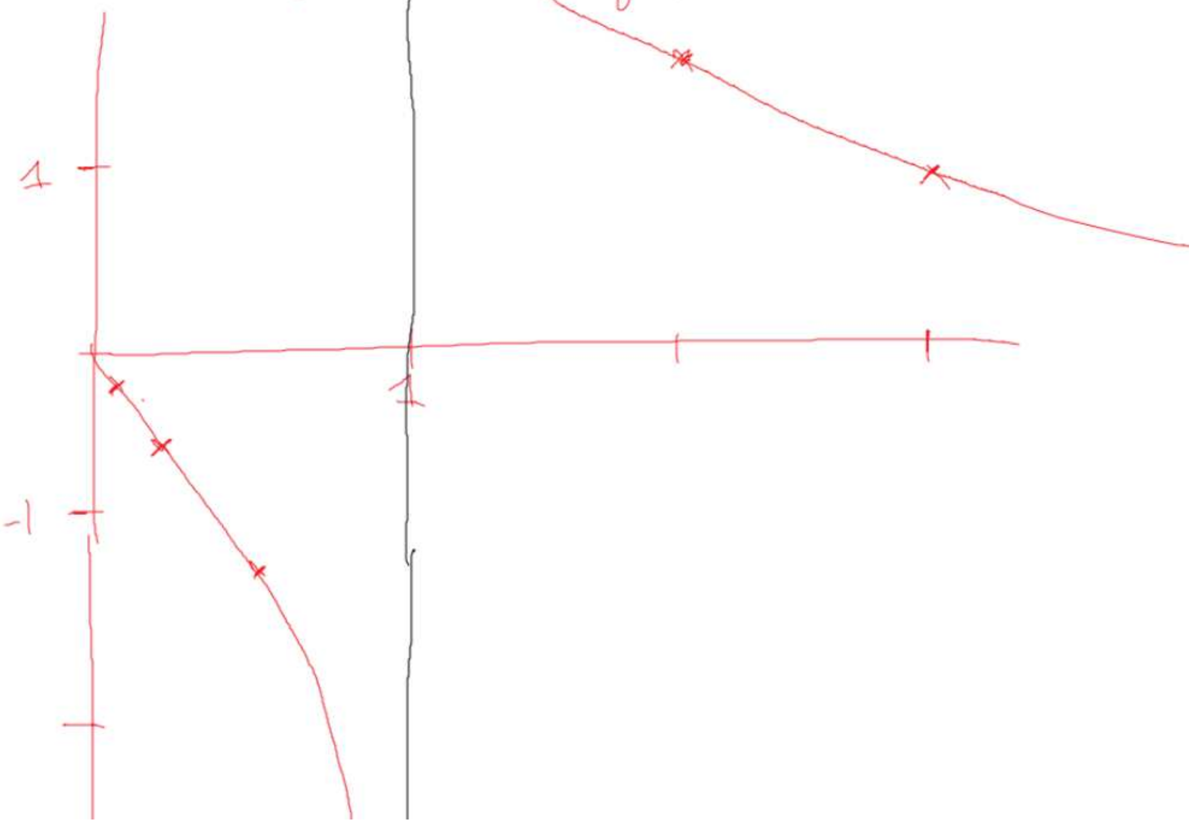
d) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

On dresse le tableau de valeurs suivant :

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	2	3	10
$g(x)$	$\simeq -0{,}4$	$\simeq -0{,}6$	$\simeq -1{,}4$	$\simeq -3{,}9$	$\simeq -9{,}5$	$\simeq 1{,}4$	$\simeq 0{,}9$	$\simeq 0{,}4$

Les valeurs de $g(x)$ sont données à 10^{-1} près.



3] $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$

A] a) $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$

$= \ln x$

On en déduit le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

b) $g(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x\ln x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x\ln x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to0^+} -x-1 = -1$

par somme $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -1$

c) On obtient donc le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Sur $]0;1[$, la fonction g est majorée par -1, donc $g(x)=0$ n'a pas de solution.
- Sur $[1;+\infty[$, g est continue, strictement croissante, admet des valeurs strictement négatives $(g(1)=-2)$ et des valeurs strictement positives $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\right)$. L'équation $g(x)=0$ admet une seule solution.

Donc sur $]0,+\infty[$, $g(x)=0$ admet une seule solution.

On a : $g(3,6) \simeq 0,011$ à 10^{-2} près

$g(3,5) \simeq -0,12$ à 10^{-2} près

Donc $3,5$ est une valeur approchée de α par défaut à 10^{-1} près.

d) Ainsi on a :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	

B) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x+1 = 1$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x+1} = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$$\frac{\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée

par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $f'(x) = - \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = - \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln x}{(x+1)^2}$

$= - \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{x\ln x - x - 1}{x(x+1)^2}$

$= \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

Comme x est strictement positif ainsi que $(x+1)^2$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

$$f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} \iff 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha+1} = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\iff \frac{\ln \alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\iff \alpha \ln \alpha = \alpha + 1$$

$$\iff \alpha \ln \alpha - \alpha - 1 = 0$$

$$\iff g(\alpha) = 0.$$

Or $g(\alpha) = 0$, donc on a montré que : $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$

d) $f(1) = 1 - \frac{\ln 1}{2} = 1$

le point A de tangence a pour coordonnées $(1;1)$.

$f'(1) = \frac{g(1)}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$(\mathcal{T})$ a une équation du type : $y = -\frac{1}{2}x + b$

$A \in (\mathcal{T}) \iff y_A = -\frac{1}{2}x_A + b$

$\iff 1 = -\frac{1}{2} + b$

$\iff b = \frac{3}{2}$

$(\mathcal{T})$ a pour équation : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

e)